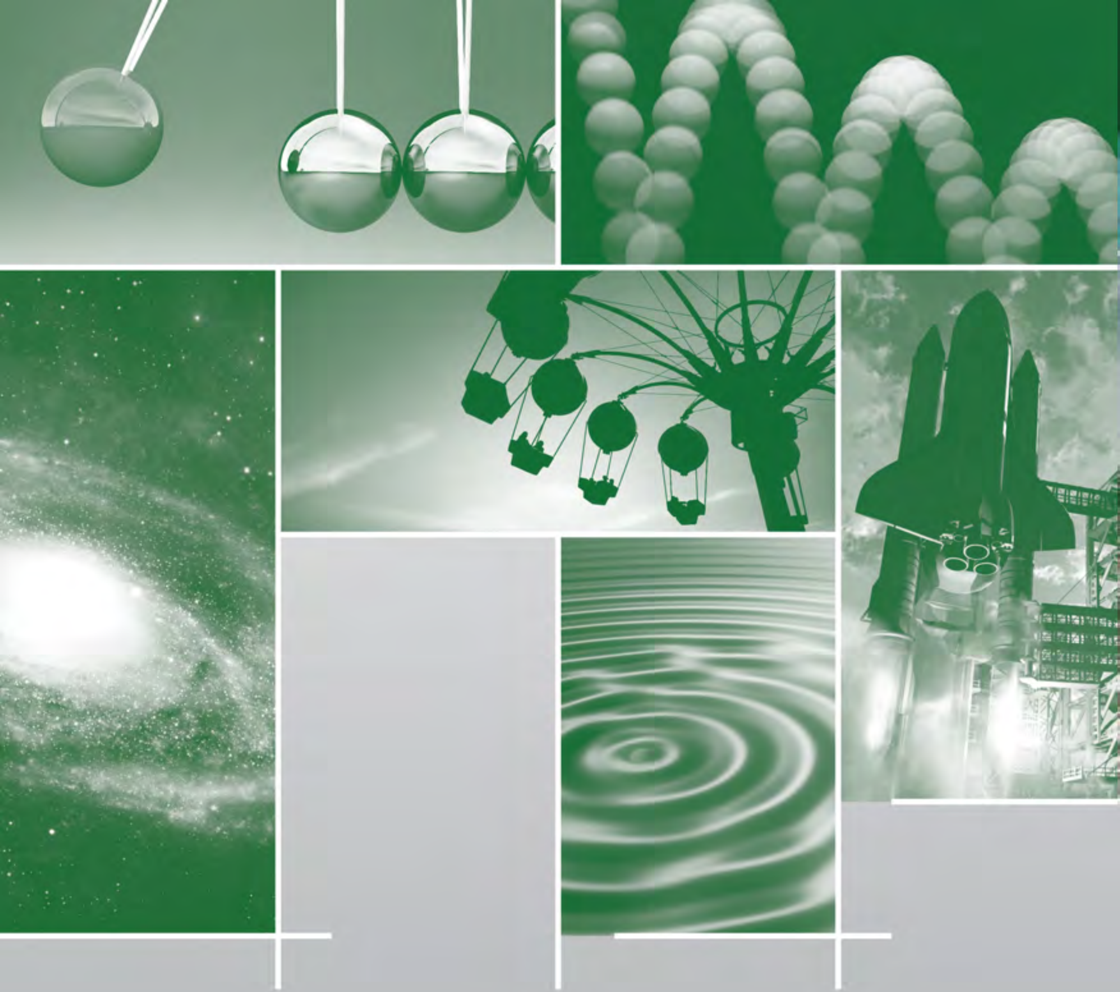


دليل حلول مسائل كتاب

الميكانيكا الكلاسيكية

مقدمة أساسية

لاري جلادني

دليل حلول مسائل كتاب الميكانيكا الكلاسيكية:
مقدمة أساسية

دليل حلول مسائل كتاب الميكانيكا الكلاسيكية: مقدمة أساسية

تأليف
لاري جلادني

ترجمة
محمد أحمد فؤاد باشا

مراجعة
أحمد فؤاد باشا

هنــداوي

دليل حلول مسائل كتاب الميكانيكا الكلاسيكية: مقدمة أساسية

لاري جلادني

Solutions Manual for "Classical Mechanics: A Critical Introduction"

Larry Gladney

رقم إيداع ٢١٤٢٧ / ٢٠١٤
تدمك: ٢ ١٨٧ ٧٦٨ ٩٧٧ ٩٧٨

مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة

إن مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة غير مسئولة عن آراء المؤلف وأفكاره
وإنما يعبّر الكتاب عن آراء مؤلفه

٥٤ عمارات الفتح، حي السفارات، مدينة نصر ١١٤٧١، القاهرة
جمهورية مصر العربية
تليفون: ٢٢٧٠٦٣٥٢ ٢٠٢ + **فاكس:** ٣٥٣٦٥٨٥٣ ٢٠٢ +
البريد الإلكتروني: hindawi@hindawi.org
الموقع الإلكتروني: http://www.hindawi.org

تصميم الغلاف: إيهاب سالم.

نشرت هذه الترجمة بموجب رخصة المشاع الإبداعي، والتي تنص على الاستخدام في الأغراض غير التجارية والترخيص بالمثل.

Arabic Language Translation Copyright © 2014 Hindawi Foundation for Education and Culture.
Licensed under a Creative Commons Attribution-Non-Commercial-ShareAlike 3.0 license
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.ar
Solutions Manual for "Classical Mechanics: A Critical Introduction"
Copyright © 2011, 2012 Larry Gladney.
Licensed under a Creative Commons Attribution-Non-Commercial-ShareAlike 3.0 license
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/

المحتويات

مقدمة الدليل	٧
١- كينماتيكا	٩
٢- قانونَا نيوتن الأول والثالث	١٩
٣- قانون نيوتن الثاني	٢٧
٤- كمية التحرك	٤٥
٥- الشغل والطاقة	٥٥
٦- الحركة التوافقية البسيطة	٦٧
٧- الاتزان الاستاتيكي لأجسام جاسئة بسيطة	٧١
٨- الحركة الدورانية، وكمية التحرك الزاويِّ، وديناميكا الأجسام الجاسئة	٧٩
٩- ملحوظات على الجاذبية	٩٧

مقدمة الدليل

يضم دليل المعلم هذا حلولًا كاملة للمسائل الواردة في كتاب «الميكانيكا الكلاسيكية: مقدمة أساسية» المتاح بالمجان للجميع على الإنترنت، بقلم البروفيسور مايكل كوهين. ويُنصح الطلاب بشدة بمحاولة حل المسائل قبل أن يطلعوا على حلولها.

تقع مسئولية أي أخطاء وردت بهذا الدليل على عاتقي، وسأقدِّر أيَّ إخطار لي بذلك.

لاري جلادني، قسم الفيزياء وعلم الفلك، جامعة بنسلفانيا،
فيلادلفيا، PA 19104-6396، الولايات المتحدة الأمريكية
البريد الإلكتروني: gladney@physics.upenn.edu

الفصل الأول

كينماتيكا

(١) حلول مسائل الكينماتيكا

(١-١) حركة أحادية البعد

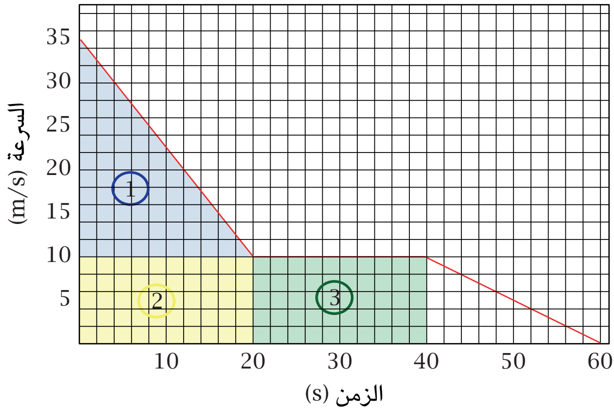
(١-١) (أ) نُوجِد المساحةَ تحت الرسم البياني للسرعة مقابلَ الزمن للحصول على المسافة المقطوعة (أي الإزاحة). من شكل ١-١، يمكننا بسهولة تقسيم المساحة تحت المنحنى البياني للسرعة مقابل الزمن إلى ٣ مساحات. بجمع هذه المساحات نحصل على الإجابة.

$$\begin{aligned} \text{area 1} &= \frac{1}{2}\,(35\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s})\,(10\,\mathrm{s} - 0) = 125\,\mathrm{m},\\ \text{area 2} &= (10\,\mathrm{m/s} - 0)\,(20\,\mathrm{s} - 0) = 200\,\mathrm{m},\\ \text{area 3} &= (10\,\mathrm{m/s} - 0)\,(40\,\mathrm{s} - 20\,\mathrm{s}) = 200\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{1-1}$$

المسافة الكلية من $t = 0$ إلى $t = 40$ هي $525\,\mathrm{m}$.

(ب) العجلة ما هي إلا ميل الرسم البياني للسرعة مقابل الزمن؛ إذنْ فإن:

$$a = \frac{v\,(t = 60) - v\,(t = 40)}{60\,\mathrm{s} - 40\,\mathrm{s}} = -0.5\,\mathrm{m/s^2}. \tag{1-2}$$



شكل ١-١: قياس إزاحة السيارة من منحنى السرعة مقابل الزمن.

(ج) نحتاج إلى الإزاحة الكلية للسيارة عند $t = 60\,\text{s}$، ونحصل عليها كما يلي:

$$\text{area } t = 40 \longrightarrow 60 = \frac{1}{2}\,(60\,\text{s} - 40\,\text{s})\,(10\,\text{m/s} - 0) = 100\,\text{m}. \qquad (1\text{-}3)$$

عندئذٍ تكونُ الإزاحة الكلية ٥٢٥ + ١٠٠ = ٦٢٥ مترًا، والسرعة المتوسطة هي:

$$v_{\text{avg}} = \frac{x\,(t = 60) - x\,(t = 0)}{60\,\text{s} - 0} = 10.4\,\text{m/s}. \qquad (1\text{-}4)$$

(١-٢) (أ) نبدأ بوصفِ موضعَي الظبي والفهد لكلٍّ من الزمنِ الابتدائي والزمنِ الذي عنده يلحق الفهدُ بالظبي (الزمن «النهائي»). عند البدء في حلِّ مسائل الفيزياء لأول مرة، يكون من المفيد وجودُ جدولٍ يحتوي على المعلومات المعروفة والمجهولة. من المناسب أن تكون جميع الوحدات m/s أو m/s^2، وبما أننا نرغب في هذه الوحدات، فإننا نحتاج لإجراء بعض التحويلات:

$$\begin{aligned} 101\,\text{km/h} &= \left(1.01 \times 10^5\,\text{m/h}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right) = 28.1\,\text{m/s},\\ 88\,\text{km/h} &= \left(8.80 \times 10^4\,\text{m/h}\right)\left(\frac{1\,\text{h}}{3600\,\text{s}}\right) = 24.4\,\text{m/s}. \end{aligned} \qquad (1\text{-}5)$$

	cheetah	antelope
initial position	$x_{0c} = 0.$	$x_{0a} = 50.0$
final position	$x_c = ?$	$x_a = x_c$
initial velocity	$v_{0c} = 28.1$	$v_{0a} = 24.4$
final velocity	$v_c = 28.1$	$v_a = 24.4$
acceleration	$a_c = 0.$	$a_a = a_c = 0$

(1-6)

حدَّدَتْ لنا المسألةُ إيجادَ الزمن الذي يكون عنده الفهدُ والظبي عند نفس الموضع. باستخدام (1.11c)، يكون لدينا:

$$x_c = x_a,$$

$$x_{0c} + v_{0c}t = x_{0a} + v_{0a}t \Longrightarrow$$

$$t = \frac{x_{0a}}{v_{0c} - v_{0a}} = \frac{50.0\,\text{m}}{(28.1 - 24.4)\,\text{m/s}}, \tag{1-7}$$

$$t = 13.5\,\text{s}.$$

المسافة المقطوعة بواسطة الفهد هي:

$$x_c = v_{0c}t = (28.1\,\text{m/s})\,(13.5\,\text{s}) = 379\,\text{m}. \tag{1-8}$$

(ب) الموقف هنا هو ذاته كما في الجزء (أ)، إلا أنه في هذه الحالة يكون موضعُ البداية للظبي مجهولًا، وزمنُ اللحاق $t = 20\,\text{s}$. وبذلك يكون:

$$x_c = x_a,$$

$$x_{0c} + v_{0c}t = v_{0c}t = x_{0a} + v_{0a}t \Longrightarrow \tag{1-9}$$

$$x_{0a} = (v_{0c} - v_{0a})t = (28.1\,\text{m/s} - 24.4\,\text{m/s})(20.0\,\text{s}) = 74.0\,\text{m}.$$

(١-٣) (أ) رغم أننا لا نعلم ارتفاعَ قاعدة النافذة عن النقطة التي رُمِيَتْ من عندها الكرة، فإن هذا غير مهمٍّ؛ طالما أن العجلة ثابتة ومعلومة، وأن زمن الانتقال خلال مسافة معلومة معلوم أيضًا. ولهذا، إذا كانت v_0 هي مقدار سرعة الكرة عند مرورها بقاعدة النافذة، وt هو الزمن الذي تمرُّ خلاله الكرة من قاعدة النافذة إلى قمتها، وy_0 هو موضع قاعدة النافذة، وy_1 هو موضع قمة النافذة؛ فإن:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Longrightarrow \\ v_0 &= \frac{(y_1 - y_0) + (1/2)\, g t^2}{t} \\ &= \frac{(3.00\,\text{m}) + (1/2)\,(9.80\,\text{m/s}^2)\,(0.400\,\text{s})^2}{0.400\,\text{s}}, \\ v_0 &= 9.46\,\text{m/s}. \end{aligned} \tag{1-10}$$

هذا يعطينا القيمةَ العظمى للارتفاع الذي تصل إليه الكرةُ؛ حيث إنَّ مقدارَ السرعة النهائية صفر، ويكون:

$$\begin{aligned} v_f^2 = 0 &= v_0^2 - 2g\left(y_f - y_0\right) \Longrightarrow \\ y_f - y_0 &= \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(9.46\,\text{m/s})^2}{2\,(9.80\,\text{m/s}^2)} = 4.57\,\text{m}. \end{aligned} \tag{1-11}$$

وبذلك فإن أقصى ارتفاع فوق قمة النافذة هو:

$$y_f - y_1 = (4.57 - 3.00)\,\text{m} = 1.57\,\text{m}. \tag{1-12}$$

(ب) مقدار سرعة الكرة عندما تصل إلى قمة النافذة لأول مرة هو:

$$v_1 = v_0 - gt = 9.46\,\text{m/s} - \left(9.80\,\text{m/s}^2\right)(0.400\,\text{s}) = 5.54\,\text{m/s}. \tag{1-13}$$

الفترة الزمنية، Δt، بين المرور بقمة النافذة أثناء الصعود (v_1) وأثناء الهبوط (نسمِّي ذلك v_{down}) هي:

$$\begin{aligned} v_{\text{down}} &= v_{\text{up}} - g\Delta t \implies \\ \Delta t &= \frac{-v_1 - v_1}{-g} \\ &= \frac{-2\,(5.54\,\text{m/s}^2)}{-9.80\,\text{m/s}^2}, \\ \Delta t &= 1.13\,\text{s}. \end{aligned} \tag{1-14}$$

(١-٤) نحلُّ المسألةَ في إطارٍ مرجعيٍّ له نفس السرعة التي كان عليها المصعدُ عند انطلاق الكرة (نفترض أن الكرة لا ترتطم بسقف المصعد). إذا أخذنا $t = 0$ في اللحظة التي أُطلِقَتْ عندها الكرة ورمزنا للمحور العمودي بالحرف y؛ إذنْ $y_{\text{floor}} = (1/2)\,At^2$ و$y_{\text{ball}} = v_0t - (1/2)\,gt^2$. ارتفاع الكرة فوق الأرضية هو $y_b - y_f = v_0t - (1/2)\,(g + A)\,t^2$، الذي تكون قيمته العظمى عند $t = v_0/(g + A)$، وتكون هذه القيمة هي $h_{\max} = v_0^2/2\,(g + A)$.

نرى أن أقصى ارتفاع فوق الأرضية تصل إليه الكرة هو نفس الارتفاع الذي كانت ستصل إليه إذا قُذِفت لأعلى بسرعة v_0 داخل صندوقٍ لا متسارعٍ على كوكبٍ عجلةُ جاذبيتِه $g + A$ (بدلًا من g). سوف نرى (مثال ٣-٢) أن القوة المتجهة لأعلى التي تؤثِّر بها الأرضيةُ على شخصٍ كتلتُه m داخلَ مصعد متسارِع (القوة التي يقيسها الميزان) هي $m\,(g + A)$، وهي التي كان سيقرؤها الميزانُ إنْ لم يكن المصعدُ متسارِعًا، ولكنه على كوكبٍ عجلةُ جاذبيتِه $(g + A)$.

(١-٥) (أ) طول الممر أقلُّ من $200\,\text{m}$. إذا سمَّينا طولَ الممر x، فَلِكَي ينتهيَ السباقُ بالتعادُل، ينبغي على مريم أن تجري المسافةَ $200 - x\,\text{m}$ بمعدل $6\,\text{m/s}$، بحيث تكون محصلة الزمن فوق الممر (المحدَّد بمقدار سرعتها $8\,\text{m/s} = 2 + 6$)، والزمن بعد انتهاء الممر تساوي المسافة $200\,\text{m}$ التي قطعتها أليسون مقسومةً على مقدار سرعتها الثابت $7\,\text{m/s}$؛ إذنْ فإن:

$$\frac{200\,\text{m}}{7.00\,\text{m/s}} = \frac{x}{8.00\,\text{m/s}} + \frac{200\,\text{m} - x}{6.00\,\text{m/s}} \implies \tag{1-15}$$

العامل المشترك بين الأرقام ٦، و٧، و٨ هو ١٦٨ (٣٠٨٠٧)؛ لهذا نضرب الأطراف في هذا العامل ونحل المعادلة في x.

$$24\,(200\,\text{m}) = 21x + 28\,(200\,\text{m} - x) \Longrightarrow$$
$$7x = (28 - 24)\,(200\,\text{m}) \Longrightarrow \qquad (1\text{–}16)$$
$$x = 114\,\text{m}.$$

(ب) ينبغي الآن أن ننظر إلى زمنَيْ أليسون ومريم على نحو منفصل:

$$t_{\text{Miriam}} = \frac{200\,\text{m}}{6.00\,\text{m/s}} = 33.3\,\text{s},$$
$$t_{\text{Alison}} = \frac{114\,\text{m}}{(7.00 - 2.00)\ \text{m/s}} + \frac{(200 - 114)\ \text{m}}{7.00\,\text{m/s}} = 35.1\,\text{s}. \qquad (1\text{–}17)$$

تفوز مريم بالسباق.

(١-٢) حركة ثنائية وثلاثية الأبعاد

(١-٦) نستخدم معادلات الفصل.

(أ) نستخدم المعادلة (1-16):

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[(4t - 7)\,\hat{\imath} - 2t\hat{\jmath}\right]\ \text{m/s} \Longrightarrow$$
$$\vec{v}\,(t = 2) = \left[\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}\right]\ \text{m/s}. \qquad (1\text{–}18)$$

(ب)

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}\right]\ \text{m/s}^2 = \vec{a}\,(t = 5\,\text{s})\,. \qquad (1\text{–}19)$$

(ج) السرعة المتوسطة تُعطَى بالمعادلة (1-1):

$$\begin{aligned} v_{\text{av}} &= \frac{\vec{r}\,(t=3)-\vec{r}\,(t=1)}{3-1} \\ &= \frac{(18-21)\,\hat{i}-(9-1)\,\hat{j}}{2}\ \text{m/s}, \\ v_{\text{av}} &= \left(-1.5\hat{i}-4\hat{j}\right)\ \text{m/s}. \end{aligned} \tag{1-20}$$

(١-٧) لاحِظْ أن ميلَ التلِّ يمكن وصفُه بدلالة:

$$-\tan\theta_1 = \frac{y_h}{x_h}, \tag{1-21}$$

بحيث $\theta_1 = 10.0°$ و(x_h, y_h) هما إحداثِيًّا سطحِ التل. نتخذ الاصطلاحَ المعتادَ بأن الاتجاه لأعلى هو اتجاه $+y$، وبذلك نحتاج إلى أن تتجه زاوية التل θ_1 لأسفل الأفقي. وبفرض أن نقطة البداية لها الإحداثيان $(0, +6.00\,\text{m})$، يكون موضع المتسابِق كدالة في الزمن:

$$\begin{aligned} x_s &= v_0\cos\theta_2 t, \\ y_s &= 6.00\,\text{m} + v_0\sin\theta_2 t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{1-22}$$

بحذف t من المعادلتين نحصل على:

$$y_s = 6.00\,\text{m} + x_s\tan\theta_2 - \frac{g}{2}\frac{x_s^2}{(v_0\cos\theta_2)^2}. \tag{1-23}$$

معنى «الهبوط» هو أن يكون لدينا $x_s = x_h$ و$y_s = y_h$ في نفس الوقت. دعنا إذنْ نُزِيل الدليلَ السفليَّ ونعرِّف x على أنها المسافةُ الأفقيةُ من نقطة الانطلاق؛ إذنْ فإن:

$$
\begin{aligned}
y &= -x\tan\theta_1 = 6.00\,\mathrm{m} + x\tan\theta_2 - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_2)^2} \implies \\
0 &= 6.00\,\mathrm{m} + x\,(\tan 15.0^\circ + \tan 10.0^\circ) - \frac{(9.80\,\mathrm{m/s^2})\,x^2}{2(30.0\,\mathrm{m/s}\cdot\cos 15.0^\circ)^2} \\
&= 6.00\,\mathrm{m} + x\,(0.44428) - \left(5.83534\times10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}\right)x^2 \implies \\
x &= \frac{-0.44428 \pm \sqrt{0.197381 + 4\,(0.00583534)\,(6.00)}}{2\,(-0.00583534\,\mathrm{m}^{-1})} \\
&= 87.8\,\mathrm{m}.
\end{aligned} \tag{1-24}
$$

لاحِظْ أن الجذر الآخَر للجذر التربيعي يعطي الإجابةَ المناظرة للمكان على المنحدر الذي كان سيبدأ منه المسارُ إذا لم يكن هناك ميلٌ لأعلى.

(١-٨) الفترة الزمنية مشتَّقَة من مقدار سرعة نقطةٍ على الإطار الخارجي، والتي تُعيَّن بدورها من قيمة العجلة المركزية. إذا كان نصفُ قُطْرِ الإطار الخارجي r، وكانَتِ الفترةُ الزمنية τ؛ إذنْ فإن:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{g}{5} = \frac{v^2}{r} \implies \\
v &= \sqrt{\frac{rg}{5}}, \\
\tau &= \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{5r}{g}} \qquad (1\text{-}25) \\
&= 2\,(3.141593)\sqrt{\frac{5\,(1000\,\mathrm{m})}{9.81\,\mathrm{m/s^2}}}, \\
\tau &= 142\,\mathrm{s}.
\end{aligned}
$$

(١-٩) يمكن استنتاج نصف القطر من تعريف العجلة المركزية على النحو التالي:

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{r} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{v^2}{a} \\ &= \frac{\left[(3.00 \times 10^5\,\text{m/h})(1\,\text{h}/3600\,\text{s/h})\right]^2}{0.05\,(9.81\,\text{m/s}^2)}, \\ r &= 1.42 \times 10^4\,\text{m} = 14.2\,\text{km}. \end{aligned} \tag{1-26}$$

يبدو الناتج كبيرًا على نحوٍ غريبٍ. في الواقع، يجب على المهندسين إمالةُ الطُّرُق (تمامًا كما تميل طائرةٌ ما أثناءَ الطيران لكي تنعطِف) لتجنُّبِ نصف قُطْر الانحناء الكبير هذا.

(١-١٠) نحتاج إلى نصف قُطْر المسار الدائري لحساب العجلة. بمجرد حصولنا عليه، وطالما أننا نعلم السرعة، يمكننا استخدام (1-18):

$$r = L \sin\theta \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{(1.21\,\text{m/s})^2}{(1.20\,\text{m})\sin 20.0^\circ}, \\ |\vec{a}| &= 3.57\,\text{m/s}^2. \end{aligned} \tag{1-27}$$

اتجاه العجلة يكون دائمًا نحوَ مركزِ المسار الدائري.

الفصل الثاني

قانونَا نيوتن الأول والثالث

(١) حلول مسائل قانونَيْ نيوتن الأول والثالث

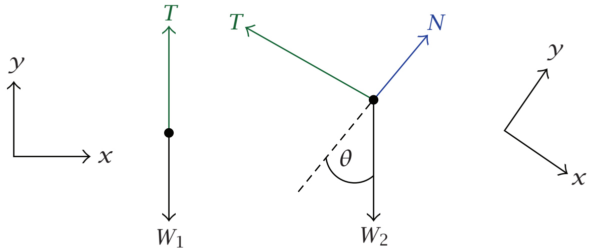
(٢-١) (أ) مخطَّطَا الجسم الحر للكتلتين في هذه الحالة هما:

معادلات القانون الأول للوزنين هي:

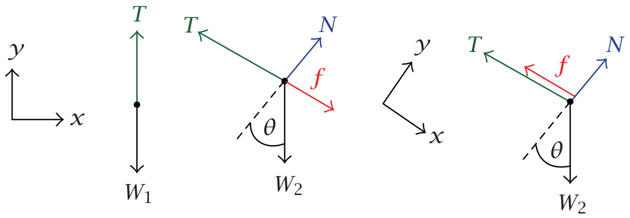
$$T - W_1 = 0 \Longrightarrow T = W_1 = 100 \text{ newtons},$$

$$\begin{aligned} T - W_2 \sin\theta &= 0 \Longrightarrow \\ W_2 = \frac{T}{\sin\theta} = \frac{W_1}{\sin\theta} &= \frac{100 \text{ newtons}}{\sin 30^\circ} \\ &= 200 \text{ newtons}. \end{aligned} \tag{2-1}$$

(ب) والآن، على حسب الوزن W_2 قد تكون الكتلةُ على وشك أن تُسحَب لأعلى المستوى أو تنزلق لأسفل المستوى. لنَدَعْ $W_{2,\min}$ مُناظِرًا لأقل وزنٍ قبل أن تنزلق الكتلةُ W_2 لأعلى المنحدر، و$W_{2,\max}$ مُناظِرًا لأقصى وزن قبل أن تنزلق الكتلةُ W_2 لأسفل المنحدر. مخطَّطَا الجسم الحر لهاتين الحالتين موضَّحَان في الشكلين ٢-١ و٢-٢. لاحِظْ أنه في هاتين الحالتين الخاصتين فقط تكون قوة الاحتكاك عند أقصى مقدار لها، $f = \mu_s N$. في هاتين الحالتين، تظلُّ معادلة القانون الأول للوزن W_1 كما كانت في الجزء (أ)؛ ومن ثَمَّ لا يزال لدينا $T = W_1$. بالنسبة إلى قيمة W_2 الصغرى، تكون معادلات القانون الأول



شكل ٢-١: مخطط الجسم الحر للمسألة (٢-١) (أ).



شكل ٢-٢: مخطط الجسم الحر للمسألة (٢-١) (ب).

لـ W_2 هي:

$$
\begin{aligned}
&y: N - W_2 \cos\theta = 0 \Longrightarrow N = W_2 \cos\theta, \\
&x: \; -T + f + W_2 \sin\theta = 0 \Longrightarrow \\
&W_1 - \mu_s N - W_{2,\min} \sin\theta = 0 \Longrightarrow \\
&W_1 = W_{2,\min} \left(\sin\theta + \mu_s \cos\theta\right) \Longrightarrow \\
&W_{2,\min} = \frac{W_1}{\sin\theta + \mu_s \cos\theta} = \frac{100 \text{ newtons}}{\sin 30^\circ + 0.4 \cos 30^\circ}, \\
&W_{2,\min} = 118 \text{ newtons.}
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

بالنسبة إلى قيمة W_2 العظمى، تكون معادلة القوة العمودية كما هي، ولكن تُعرَف الآن القوة المحصلة على طول المنحدر بأنها:

$$W_{2,\max} \sin\theta - f - T = 0 \longrightarrow$$

$$W_{2,\max} \sin\theta - \mu_s W_2 \cos\theta - W_1 = 0 \longrightarrow$$

$$W_{2,\max} = \frac{W_1}{\sin\theta + \mu_s \cos\theta} = \frac{100 \text{ newtons}}{\sin 30^\circ - 0.4 \cos 30^\circ}, \tag{2-3}$$

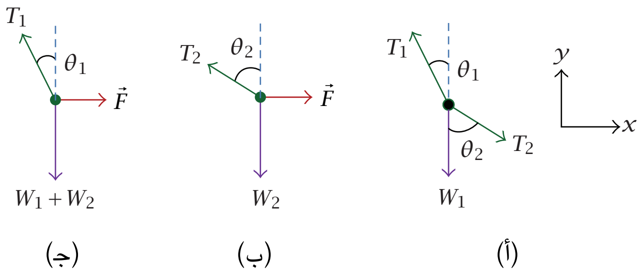
$$W_{2,\max} = 651 \text{ newtons.}$$

(٢-٢) يمكننا استخدام مخطَّطَيِ الجسم الحر (أ وب) المبيَّنَين في الشكل ٢-٣ لتفقُّد القوى الأفقية والرأسية المؤثرة. ينتج من ذلك ٤ معادلات (واحدة في x وواحدة في y لكلٍّ من الوزنين)، ولكن في ٤ مجاهيل (قوَّتَا الشد T_1 وT_2 والزاويتان). وبما أننا مهتمون فقط بالزاويتين، من الأسهل فعليًّا تدبُّر مخطَّط الجسم الحر (ج)، وهو لنظام يحتوي على كلا الوزنين، وبالتالي يكون مقدار قوة الجاذبية المؤثرة هو $W_1 + W_2$، في حين أن $\vec{T}_2$ قوة داخلية، وبالتالي تكون غير ظاهرة، وتكون القوتان الخارجيتان الوحيدتان بالإضافة إلى الوزن هما $\vec{T}_1$ و$\vec{F}$؛ ومن ثَمَّ يكون لدينا معادلتا القوة:

$$\begin{aligned} x&: F - T_1 \sin\theta_1 = 0 \Rightarrow T_1 \sin\theta_1 = F,\\ y&: T_1 \cos\theta_1 - W_1 - W_2 = 0 \Rightarrow T_1 \cos\theta = W_1 + W_2. \end{aligned} \tag{2-4}$$

نقسم المعادلة الأولى على الثانية لنحصل على:

$$\begin{aligned} &\frac{T_1 \sin\theta_1}{T_2 \cos\theta_1} = \tan\theta_1 = \frac{F}{W_1 + W_2} \Rightarrow\\ &\theta_1 = \tan^{-1}\frac{F}{W_1 + W_2}. \end{aligned} \tag{2-5}$$



شكل ٢-٣: مخطط الجسم الحر للمسألة (٢-٢).

لإيجاد θ_2 اعتبر مخطط الجسم الحر (ب).

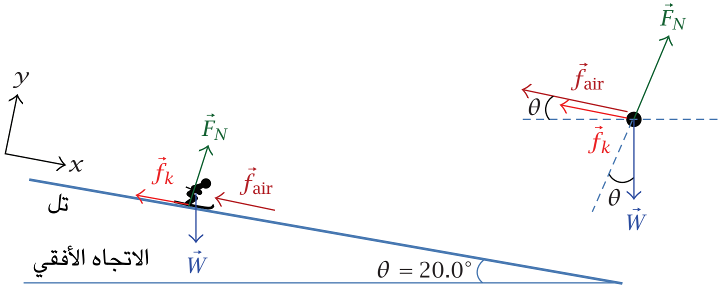
$$x\colon F - T_2 \sin\theta_2 = 0 \Longrightarrow T_2 \sin\theta_2 = F,$$
$$y\colon T_2 \cos\theta_2 - W_2 = 0 \Longrightarrow T_2 \cos\theta_2 = W_2. \tag{2-6}$$

مرة أخرى، نقسم المعادلة الأولى على الثانية لنحصل على:

$$\frac{T_2 \sin\theta_2}{T_2 \cos\theta_2} = \tan\theta_2 = \frac{F}{W_2} \Longrightarrow$$
$$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{F}{W_2}. \tag{2-7}$$

(٢-٣) مخطَّط الجسم الحر مبيَّن في الشكل ٢-٤، ومعادلات القوى موضحة أدناه. لاحِظْ أن القوة المحصلة المؤثرة على المتسابق قيمتها صفر؛ لأن السرعة ثابتة.

$$x\colon W \sin\theta - f_{\text{air}} - f_k = 0,$$
$$f_{\text{air}} = 0.148v^2 = W \sin\theta - \mu_k W \cos\theta,$$
$$y\colon F_N - W \cos\theta = 0 \Longrightarrow \tag{2-8}$$
$$F_N = W \cos\theta = (620\,\text{N}) \cos 20.0^\circ = 583\,\text{N},$$



شكل ٢-٤: مخطط الجسم الحر للمسألة (٢-٣).

حيث $\vec{f}_{air}$ هو الاحتكاك نتيجة مقاومة الهواء المناظرة للسرعة النهائية. الآن يمكننا العودة إلى معادلة x للحصول على:

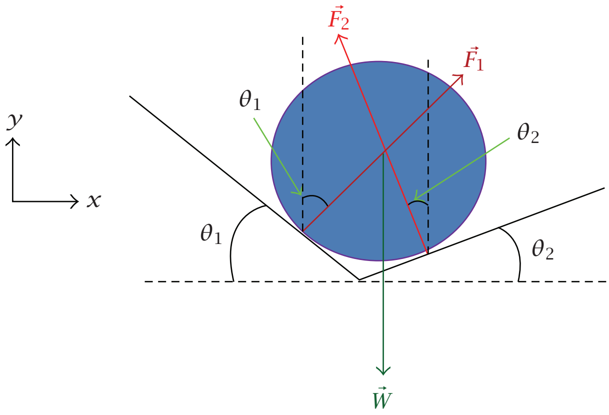
$$0.148v^2 = (620\,\text{N})\,[\sin 20.0° - (0.150)\,(0.940)] \Longrightarrow$$
$$v = \sqrt{\frac{125\,\text{N}}{0.148\,\text{N}/(\text{m/s})^2}} = 29.0\,\text{m/s}. \tag{2-9}$$

(٢-٤) مخطط القوة لهذه الحالة مبيَّن في شكل ٢-٥. معادلتَا x وy للقوة هما:

$$x\colon F_1 \sin\theta_1 - F_2 \sin\theta_2 = 0 \Longrightarrow F_2 = F_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2},$$
$$y\colon F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 - W = 0 \Longrightarrow \tag{2-10}$$
$$F_1\,[\cos\theta_1 + \sin\theta_1 \cot\theta_2] - W = 0.$$

باستبدال القوة F_2 في المعادلة y بما يعادلها من المعادلة x ينتج:

$$F_1 = \frac{W}{\cos\theta_1 + \sin\theta_1 \cot\,\theta_2} \Longrightarrow$$
$$F_2 = \frac{F_1}{\sin\theta_2 / \sin\theta_1} = \frac{W}{\cos\theta_2 + \cot\,\theta_1 \sin\theta_2}. \tag{2-11}$$



شكل ٢-٥: مخطط القوة للمسألة (٢-٤).

لاحِظْ أنه يمكنك التأكُّد من صحة الإجابة عندما ترى أنك تحصل على F_2 عن طريق استبدال الدليلين السفليين في معادلة F_1.

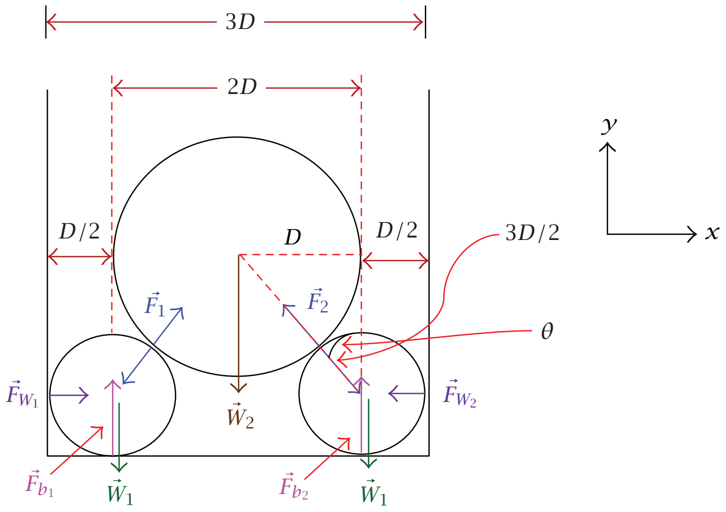
(٢-٥) يعرض مخطط القوى المبيَّن في شكل ٢-٦ جميعَ الزوايا التي نحتاجها. الخط الواصل بين مركز الأنبوب الذي طوله $2D$ وبين أيٍّ من مركزَيِ الأنبوبين الأصغر طولًا يصنع زاوية θ مع الرأسي بحيث:

$$\sin\theta = \frac{D}{3D/2} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \tag{2-12}$$

نرى من مخطط القوى في الاتجاه x أن حالة الاتزان تتطلب أن تكون المركبتان الأفقيتان $\vec{F}_1$ و$\vec{F}_2$ (وهما القوتان الطبيعيتان للأنبوبين السفليين على الأنبوب الذي طوله $2D$) متساويتين؛ إذنْ فإن:

$$F_1\sin\theta = F_2\sin\theta \Longrightarrow F_1 = F_2. \tag{2-13}$$

لاحِظْ أن هذا واضح أيضًا بالتماثل. يوجد لدينا أيضًا باستخدام قانون نيوتن الثالث مقدار القوتين العموديتين للأنبوب الذي طوله $2D$ المؤثر على أيٍّ من الأنبوبين



شكل ٢-٦: مخطط الجسم الحر للمسألة (٢-٥).

الأصغر طولًا. نحصل إذنْ من المركبة y على:

$$F_1 \cos\theta + F_2 \cos\theta - W_2 = 0,$$

$$2F_1 \cos\theta = W_2 \implies \tag{2-14}$$

$$F_1 = F_2 = \frac{W_2}{2\cos\theta} = \frac{3W_2}{2\sqrt{5}}.$$

في حالة الاتزان تكون كلٌّ من المركبة الرأسية والأفقية للقوة المحصلة عل كلِّ أنبوبٍ صفرًا. وعلى وجه التحديد، يمكن كتابة محصلة القوة الأفقية على كلٍّ من الأنبوبين الأصغر طولًا على الصورة التالية:

$$F_{W_1} - F_1 \sin\theta = 0 \implies$$

$$F_{W_1} = F_{W_2} = \frac{1}{2} W_2 \tan\theta = \frac{W_2}{\sqrt{5}}. \tag{2-15}$$

الفصل الثالث

قانون نيوتن الثاني

(١) حلول مسائل قانون نيوتن الثاني للحركة

(٣-١) (أ) مخطط الجسم الحر لهذه الحالة كما يلي: البكرةُ عديمةُ الوزن؛ مما يجعل من الحتمي أن تكون محصلة القوة المؤثِّرة عليها صفرًا، فإذا كان الاتجاه لأعلى هو الاتجاهَ الموجب (اتجاه متجه الوحدة $\hat{k}$ المبيَّن في شكل ٣-١)، فإن:

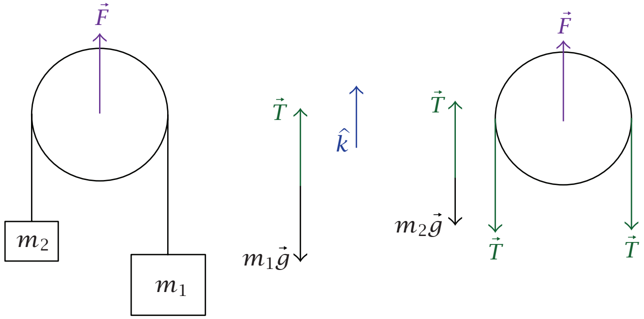
$$F - 2T = 0 \Longrightarrow T = \frac{1}{2}F = 50 \text{ newtons.} \tag{3-1}$$

إن عجلة أيٍّ من الكتلتين في إطارٍ قصوريٍّ هي الجمع المتجهي لعجلة مركز القرص وعجلة تلك الكتلة بالنسبة إلى مركز القرص. لنُسَمِّ الأخيرة $\vec{a}_1$ للكتلة m_1 و$\vec{a}_2$ للكتلة m_2. وبما أن الخيط غير ممطوط، إذنْ فنحن متأكِّدون أن $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$. إذا كانت عجلة مركز القرص $a\hat{k}$، إذنْ بكتابة $\vec{a}_2 = a_2\hat{k}$، يكون لدينا $\vec{a}_1 = -a_2\hat{k}$. الآن يمكننا كتابة معادلات القانون الثاني للكتلتين.

$$\begin{aligned} T\hat{k} - m_1 g\hat{k} &= m_1 (a - a_2)\,\hat{k}, \\ T\hat{k} - m_2 g\hat{k} &= m_2 (a + a_2)\,\hat{k}. \end{aligned} \tag{3-2}$$

يمكن إعادة كتابة هاتين المعادلتين كما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{T}{m_1} - g &= a - a_2, \\ \frac{T}{m_2} - g &= a + a_2. \end{aligned} \tag{3-3}$$



شكل ٣-١: مخطَّط الجسم الحر للمسألة (٣-١) (أ).

بجمع المعادلتين يمكننا حلهما في a، ثم في a_2 كما يلي:

$$T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-2g=2a \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_0}{4}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-g \\ &= (25.0\text{ newtons})\left[\frac{1}{5.00\,\text{kg}}+\frac{1}{2.00\,\text{kg}}\right]-9.80\,\text{m/s}^2, \end{aligned} \tag{3-4}$$

$$a = 7.70\,\text{m/s}^2.$$

إذا ما طرحنا بدلًا من ذلك المعادلةَ الأولى من المعادلة الثانية؛ إذنْ فإن:

$$2a_2 = \frac{F_0}{2}\left[\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}\right] \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{F_0}{4}\left[\frac{m_1-m_2}{m_1m_2}\right] \\ &= (25.0\text{ newtons})\left[\frac{3.00\,\text{kg}}{10.0\,\text{kg}^2}\right], \end{aligned} \tag{3-5}$$

$$a_2 = 7.50\,\text{m/s}.$$

(ب) تم استنتاج الشد بالفعل ومقداره ٥٠ نيوتن.

(٣-٢) نحل المسألة في إطار قصوري له نفس السرعة التي كان عليها المصعدُ عندما تحرَّرَتِ الكرةُ (نفترض أن الكرة لا ترتطم بسقف المصعد). إذا جعلنا $t = 0$ في اللحظة التي تحرَّرت عندها الكرة وسمَّينا المحور الرأسي y، إذنْ فإن $y_{\text{floor}} = (1/2)At^2$ و$y_{\text{ball}} = v_0t - (1/2)gt^2$. ارتفاع الكرة فوق الأرضية $y_{\text{ball}} - y_{\text{final}} = v_0t - (1/2)(g + A)t^2$، ويكُون قيمةً عظمى عند $t = v_0/(g + A)$ ومقداره:

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2(g + A)}. \tag{3-6}$$

نرى أن أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة فوق الأرضية هو نفس الارتفاع الذي كانت ستصل إليه لو أنها قُذِفت لأعلى بسرعةٍ داخلَ صندوق v_0 غير متسارع فوق كوكبٍ عجلةُ جاذبيتِه $\vec{g} + \vec{A}$ (بدلًا من $\vec{g}$؛ حيث $\vec{g} = -g\hat{k}$، و$\hat{k}$ تشير رأسيًّا لأعلى من فوق سطح الكرة الأرضية). رأينا بالفعل (مثال ٣-٢) أن القوة المتجهة لأعلى التي تؤثِّر بها الأرضيةُ على شخصٍ كتلتُه m داخل مصعد متسارِع (القوة التي يقيسها الميزان) هي $m(g + A)$، وهي التي كان سيقرؤها الميزان إذا لم يكن المصعد متسارعًا، ولكنه على كوكبٍ عجلةُ جاذبيتِه $(\vec{g} + \vec{A})$.

بصورةٍ أعمَّ إلى حدٍّ ما، يمكننا توضيح أنه إذا كان لصندوقٍ ما عجلة $\vec{A}$ (دون أن يدور) بالنسبة إلى إطار قصوري، فإنه يمكننا معاملة أي محاور مرتبطة بالصندوق كما لو كانت إطارًا قصوريًّا، بشرط أن نضيف لقائمة القوى المؤثرة على جسمٍ داخل الصندوق قوةَ الاحتكاك $-m\vec{A}$. لهذه القوة الإضافية نفس صورة قوة الجاذبية $m\vec{g}$، نسميها «خيالية» لأنها ليسَتْ ناتجةً من أي جزءٍ قابل للتحديد من المادة.

برهان. إذا كانت محاور الإطار القصوري هي $\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$، وكانت المحاور المرتبطة بالصندوق هي $\hat{i}'\hat{j}'\hat{k}'$، فإن أيَّ جسيم عجلته $\vec{a}'$ بالنسبة إلى المحاور المميزة بالشرطات تكون عجلته $\vec{a}' + \vec{A}$ بالنسبة إلى الإطار القصوري. معادلة الحركة للجسيم هي $\vec{F} = m\left(\vec{a}' + \vec{A}\right)$؛ حيث $\vec{F}$ هي القوة الكلية المؤثِّرة على الجسيم. يمكننا إعادة كتابة ذلك على الصورة $\vec{F}' = m\vec{a}'$؛ حيث $\vec{F}'$ هي مجموع القوة الحقيقية $\vec{F}$ والقوة الخيالية $-m\vec{A}$. □

(٣-٣) (أ) إذا كان اللوح لا ينزلق فإن عجلة الصبي في إطار قصوري تكون أيضًا $\vec{a}$؛ لا بد إذنْ أن تكون هناك قوة $\vec{F} = m_{\text{boy}}\vec{a}$ تؤثر على الصبي، ولا بد أنه يؤثِّر بقوة لها نفس المقدار على اللوح؛ ومن ثَمَّ فإن أقل عجلة للصبي تتسبب في الانزلاق هي:

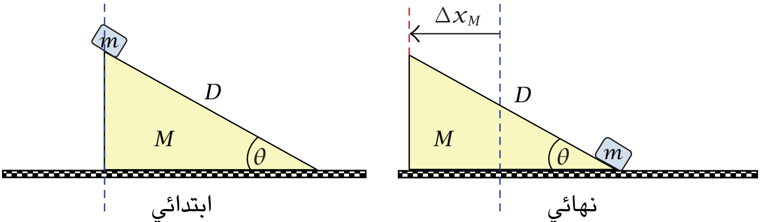
$$\begin{aligned} f_{s,\max} &= \mu_s\left(m_{\text{board}} + m_{\text{boy}}\right)g = m_{\text{boy}}a_{\min} \implies \\ a_{\min} &= \mu_s g\left[1 + \frac{m_{\text{board}}}{m_{\text{boy}}}\right] \\ &= (0.200)\left(9.80\,\text{m/s}^2\right)\left[1 + \frac{30.0\,\text{kg}}{50.0\,\text{kg}}\right], \\ a_{\min} &= 3.14\,\text{m/s}^2. \end{aligned} \tag{3-7}$$

(ب) عجلة الصبي تتخطى $a_{\min}$. ليكن $\hat{\imath}$ اتجاه عجلة الصبي، ولأن اللوح ينزلق على الجليد فسنسمي عجلته $\vec{a}_{\text{bd}} = -a_{\text{bd}}\hat{\imath}$، وتكون عجلة الصبي عندئذٍ $(4.00 - a_{\text{bd}})\,\hat{\imath}$ (بوحدات المتر/ثانية تربيع)، وعندها ينبغي أن تكون القوة المؤثرة على الصبي كالتالي:

$$F_{\text{boy},x} = m_{\text{boy}}\left(4.00 - a_{\text{bd}}\right)\hat{\imath}. \tag{3-8}$$

باستخدام قانون نيوتن الثالث، تكون إذنْ محصلة القوة الأفقية على اللوح كالتالي:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{bd}} &= -m_{\text{bd}}a_{\text{bd}}\hat{\imath} = \mu_k\left(m_{\text{boy}} + m_{\text{bd}}\right)g\hat{\imath} - m_{\text{boy}}\left(4.00\,\text{m/s}^2 - a_{\text{bd}}\right)\hat{\imath} \implies \\ -\left(m_{\text{bd}} + m_{\text{boy}}\right)a_{\text{bd}} &= \mu_k\left(m_{\text{boy}} + m_{\text{bd}}\right)g - m_{\text{boy}}\left(4.00\,\text{m/s}^2\right) \implies \\ a_{\text{bd}} &= -\frac{(0.100)\,(80.0\,\text{kg})\,(9.80\,\text{m/s}^2) - (50.0\,\text{kg})\,(4.00\,\text{m/s}^2)}{80.0\,\text{kg}} \\ &= 1.52\,\text{m/s}^2. \end{aligned} \tag{3-9}$$



شكل ٣-٢: الموضعان الابتدائي والنهائي للإسفين والكتلة المنزلقَيْن في المسألة (٣-٤).

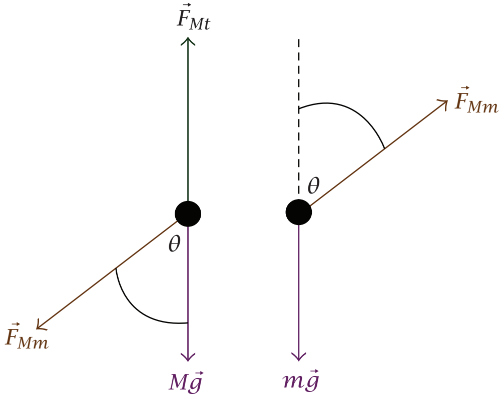
عجلة الصبي بالنسبة إلى الجليد هي:

$$a_{\text{boy}} = (4.00 - 1.52)\,\text{m/s}^2 = 2.48\,\text{m/s}^2. \tag{3-10}$$

(٣-٤) الحالة الابتدائية والنهائية مبيَّنَة في شكل ٣-٢. مخطَّطَا الجسم الحر للوتد والقالب مبيَّنَان في شكل ٣-٣. نختار إطار الكرة الأرضية القصوري بحيث يكون المحور x في الاتجاه الأفقي (نحو اليمين)، والمحور y رأسيًّا لأعلى؛ عندئذٍ تكون معادلات القانون الثاني هي:

$$\begin{aligned} x&: F_{Mm}\sin\theta = ma_x, \qquad -F_{Mm}\sin\theta = MA,\\ y&: F_{Mm}\cos\theta - mg = ma_y, \end{aligned} \tag{3-11}$$

حيث a_x وa_y هما مركبتَا عجلة القالب في الاتجاهين x وy، وA هي العجلة الأفقية للوتد. نعلم أن سطح المنضدة والجاذبية يمنعان أي عجلة رأسية للوتد. مع عدم معلومية كلٍّ من F_{Mm}، a_x وa_y، وA، نحتاج إلى معادلة واحدة إضافية لحلِّ جميع المجاهيل. المعادلة المتبقية هي القيد الذي يُلزِم القالبَ بأن يظلَّ مُلامِسًا للوتد خلال الرحلة بالكامل (وإلا فإن القوة الأفقية على الوتد سوف تتوقف). إذا كان الوتد ساكنًا، فينتج من حركة القالب على الوتد لأسفل لمسافة s أن $\Delta x = s\cos\theta$ و$\Delta y = s\sin\theta$. في الإطار المتحرك الذي ينزلق فيه الوتد بحرية، (نستخدم الشرطة كعلامة للمحاور في هذا الإطار)، ينبغي أن تكون دائمًا النسبة بين المسافتين $\Delta x'$ و$\Delta y'$ هي $\Delta y'/\Delta x' = -\tan\theta$ من أجل أن



شكل ٣-٣: مخطَّط الجسم الحر للإسفين والكتلة المنزلقَين في المسألة (٣-٤).

يحافظ القالب على البقاء ملامِسًا للوتد؛ ومن ثَمَّ يكون لدينا في الإطار القصوري للكرة الأرضية:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x' + \Delta x_M = -\frac{\Delta y}{\tan\theta} + \Delta x_M \implies \\ a_x &= -\frac{a_y}{\tan\theta} + A, \end{aligned} \tag{3-12}$$

حيث إننا اتخذنا فقط المشتقة الثانية بالنسبة إلى الزمن للحصول على العجلة. ويكون لدينا الآن من معادلات القوة:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{F_{Mm}\sin\theta}{m}, \\ A &= -\frac{F_{Mm}\sin\theta}{M}, \\ a_y &= \frac{F_{Mm}\cos\theta}{m} - g. \end{aligned} \tag{3-13}$$

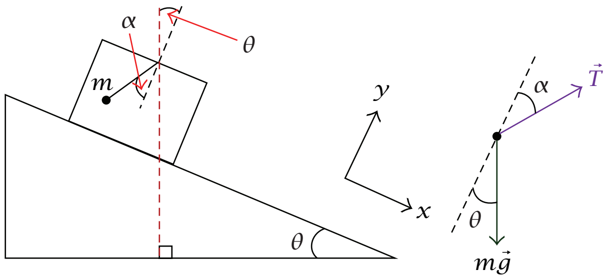
والتعويض في معادلتنا، والجمع بين a_x وa_y يُنتِج:

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{a_y}{\tan\theta} + A, \\ \frac{F_{Mm}\sin\theta}{m} &= -\frac{F_{Mm}\cos\theta - mg}{m\tan\theta} - \frac{F_{Mm}\sin\theta}{M} \Longrightarrow \\ F_{Mm} &= \frac{mM\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g \Longrightarrow \\ A &= -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g, \\ a_x &= \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g, \\ a_y &= -\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta} g. \end{aligned} \tag{3-14}$$

لتكن المسافةُ التي يقطعها الوتد في الزمن Δt الذي يحتاجه القالب ليصل إلى قاعدة الوتد هي x_{Mf}. نعيِّن كلًّا منهما من المسافة الرأسية $-D\sin\theta$ التي يقطعها القالب كالآتي:

$$\begin{aligned} -D\sin\theta &= \frac{1}{2}a_y\Delta t^2 \Longrightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{-2D\sin\theta}{a_y}} \Longrightarrow \\ \Delta t &= \sqrt{\frac{2D\left(M + m\sin^2\theta\right)}{(m+M)\,g\sin\theta}}, \\ x_{Mf} &= \frac{1}{2}A\Delta t^2 = \frac{A}{2}\cdot\frac{2D\sin\theta}{\left|a_y\right|} = -\frac{m}{M+m}D\cos\theta. \end{aligned} \tag{3-15}$$

(٣-٥) (أ) مخطط الجسم الحر مبيَّن في الشكل ٣-٤. مركبتا القوى x وy تكون أولاهما موازية للسطح المائل والثانية عمودية عليه. يحافظ الخيط على عجلة كرة البندول على طول الاتجاه x، مساوية لعجلة الصندوق المستطيلي على طول السطح المائل في الاتجاه الأسفل، وهي $g\sin\theta$ لأن نظام الصندوق بالكامل بالإضافة إلى m يمكن اعتباره



شكل ٣-٤: مخطط الجسم الحر في المسألة (٣-٥) (أ).

معرَّضًا فقط لقوة الجاذبية والقوة العمودية للسطح المائل. بالنسبة إلى نظام يتكوَّن فقط من m، يكون لدينا على طول المحور x:

$$T \sin\alpha + mg\sin\theta = mg\sin\theta. \tag{3-16}$$

الحل الوحيد الذي لا يكون به مقدار قوة الشد صفرًا هو $\alpha = 0$. بمجرد تحقُّق حالةٍ منتظمةٍ يكون الشدُّ على طول الاتجاه العمودي على السقف، وتعطي $mg\sin\theta$ العجلة الموازية للسطح المائل؛ وذلك لتحافظ على عجلة m مساويةً لنفس عجلة نظام الصندوق بالإضافة إلى m.

(ب) مع وجود احتكاك سيسقط نظام الصندوق بالإضافة إلى m بعجلة أقل من $g\sin\theta$. إذا كانت كتلة النظام الكلية M، فإن:

$$\begin{aligned}
y&: F_{\text{normal}} - Mg\cos\theta = 0 \Longrightarrow F_{\text{normal}} = Mg\cos\theta,\\
x&: Mg\sin\theta - \mu F_{\text{normal}} = Ma_x,\\
&Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta = Ma_x \Longrightarrow\\
&a_x = g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right).
\end{aligned} \tag{3-17}$$

الكتلة m كنظامٍ منفصلٍ تكون الآن تحت تأثير القوى التي تمَّ فقط اعتبارها في الجزء (أ)، ولكن ينبغي استخدام القيمة الجديدة المستنتجة حاليًّا للعجلة على طول المحور x. يتضح لنا من ذلك أن قوةَ الشد عليها أن تسحب لأعلى على طول المحور x لمنع المركبة $mg\sin\theta$ من جعل m تتسارع لأسفل على طول السطح المائل؛ بحيث تكون أسرع من الصندوق المستطيلي؛ ومن ثَمَّ فإن الشكل ٣-٤ يبيِّن أن الخيط في المكان غير الصحيح؛ حيث ينبغي أن يكون في اتجاه أسفل المنحدر بالنسبة إلى العمودي على السقف. دعنا نؤكِّد ذلك عن طريق إيجاد α.

$$y\colon T\cos\alpha - mg\cos\theta = 0 \Longrightarrow T = mg\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}, \tag{3-18}$$

$$x\colon T\sin\alpha + mg\sin\theta = ma_x = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta),$$

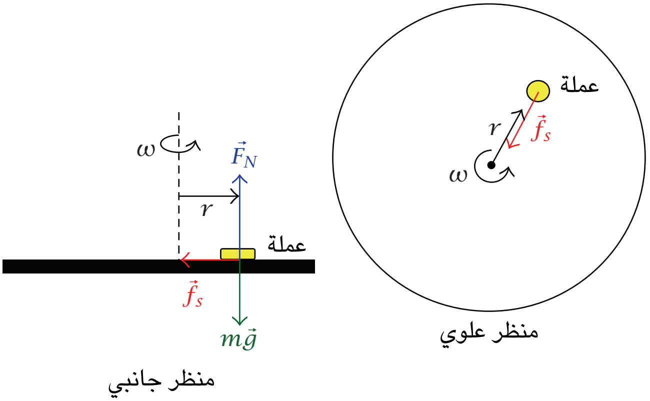
$$mg\tan\alpha\cos\theta + mg\sin\theta = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\tan\alpha\cos\theta = -\mu\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-\mu) = -\tan^{-1}\mu.$$

الإشارة السالبة تعكس حقيقة أن الخيط ينبغي أن يكون معلَّقًا في اتجاهِ أسفلِ المنحدر بالنسبة إلى العمودي (وهو الأمر الواضح عندما يكون μ كبيرًا جدًّا وتكون عجلة الصندوق، تبعًا لذلك، صغيرة جدًّا).

(٣-٦) ينبغي على القوى في الاتجاه الرأسي (أي المتعامِدة مع القرص الدوَّار) أن تتزن؛ ومن ثَمَّ يتضح لنا فورًا أن $F_N = mg$؛ حيث F_N القوة العمودية للقرص الدوَّار على العملة، وmg مقدار قوة الجاذبية المؤثِّرة على العملة. القوة الوحيدة المؤثِّرة في الاتجاه الأفقي (مستوى سطح القرص الدوَّار) هي قوة الاحتكاك الاستاتيكي (استاتيكي لأن العملة تحافظ على موضعها بالنسبة إلى القرص الدوَّار)؛ ومن ثَمَّ ينبغي أن يحقِّق الاحتكاكُ الاستاتيكي شرطَ الجذب المركزي للإبقاء على العملة متحركةً في دائرةٍ بسرعةٍ مقدارُها ثابتٌ ويساوي $v = \omega r$. أقصى نصف قطر يمكن أن تكون عنده العملة



شكل ٣-٥: مخطط الجسم الحر للمسألة (٣-٦).

من مركز الدوران يتحدَّد على حسب مقدار أقصى قوة للاحتكاك الاستاتيكي؛ ومن ثَمَّ:

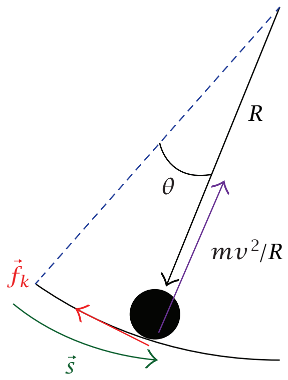
$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N = \mu_s mg = \frac{mv^2}{r} \Longrightarrow$$

$$\mu_s g = \omega^2 r \Longrightarrow \tag{3-19}$$

$$\mu_s = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{(33 \cdot 2\pi/60\,\text{s})^2\,(0.15\,\text{m})}{9.8\,\text{m/s}^2} = 0.18.$$

(٣-٧) إذا ما افترضنا أن المدارات الدائرية ممكنة مع أيٍّ من أنصاف أقطار المدارات المرفوعة إلى الأس n في قانون القوة، فيمكننا إجراء استنتاج قانون كبلر الثالث بطريقةٍ معكوسةٍ. ليكن الزمنُ الدوريُّ للمدار الدائري هو T. إذا كان إذنْ ثابتُ التناسب في قانون كبلر الثالث هو k، نجد أن:

$$T^2 = kr^n \Longrightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^n. \tag{3-20}$$



شكل ٣-٦: مخطط للمسألة (٣-٨).

وبما أنه يمكننا تعريف الثابت k كما نريد، فإننا نقوم بدمج العامل $4\pi^2$ داخله ليتضح لنا أن:

$$kv^2 = r^{2-n} \Longrightarrow$$

$$k\frac{v^2}{r} = r^{1-n}, \tag{3-21}$$

$$F_{\text{grav}} = k'r^{1-n}.$$

إذنْ قانون القوة يتناسب مع الأس $1 - n$ لنصف القطر. يتضح لنا أنه إذا كان $1 - n = -2$ فإن $n = 3$ كما هو متوقَّع.

(٣-٨) يبيِّن شكل ٣-٦ المنحنى فقط. لجعل المزلجة مثاليةً عبَّرنا عنها بمجرد نقطة عند الموضع θ من بداية المنحنى. يمكننا أيضًا تمييز الموضع بدلالة طول القوس s من بداية المسار المنحني. لقد أهملنا قوة الجاذبية لكننا يجب أن نأخذ في الاعتبار الاحتكاك الحركي (f_k)، والقوة العمودية للممر على المزلجة، والتي تحقِّق الشرط:

$$F_N = \frac{mv^2}{R}. \tag{3-22}$$

وذلك لجعل المزلجة مستمرةً في مسار الممر المنحني. تكون عندئذٍ معادلة الحركة المماسية:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -f_s = -\frac{\mu m v^2}{R}. \tag{3-23}$$

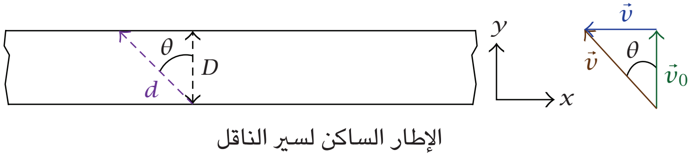
نريد السرعة كدالة في الإزاحة الزاويَّة، وليس الزمن، لذلك نستخدم قاعدة السلسلة للاشتقاق:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v, \tag{3-24}$$

حيث v هي السرعة المماسية للمزلجة. إن حل المعادلة التفاضلية يكون سهلًا إذا ما حدَّدنا المسافةَ الكلية للممر الدائري لتكون فقط $R\theta$، بمعنى أننا الآن نجعل θ مقدار الميل للمنحدر المؤدي إلى الممر المنحني كما يلي:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} &= -\frac{\mu v^2}{R} \Longrightarrow \\
\int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{v} &= \int_0^{R\theta} -\frac{\mu}{R} ds, \\
\ln v \,|_{v_0}^{v_f} &= -\frac{\mu}{R}(R\theta) \Longrightarrow \\
\ln\frac{v_f}{v_0} &= -\mu\theta \Longrightarrow \\
v_f &= v_0 e^{-\mu\theta}
\end{aligned} \tag{3-25}$$

(٣-٩) يرشدنا التلميح إلى اعتبار الإطار القصوري الذي يكون فيه سيْرُ الناقلة ساكنًا، وهو إطار يتحرك بالنسبة إلى الأرضية بسرعة $\vec{V}$. في إطار الأرضية، يتخذ القرص مسارًا منحنيًا أثناء تباطؤ سرعته بالنسبة إلى سيْرِ الناقلة، يجعل هذا من حساب معامل الحركة أمرًا صعبًا. في الإطار الساكن لسير الناقلة، يتحرك القرصُ في خط مستقيم؛ حيث لا توجد قوًى مؤثرة متعامدة على مسار القرص في هذا الإطار (فيما عدا قوة



شكل ٣-٧: مخطط المسألة (٣-٩).

الجاذبية التي تتجه لأسفل، وبالتالي ليس لها تأثير مباشِر على حركة القرص بالنسبة إلى سيْرِ الناقلة). يتحرك القرص قطريًّا إلى الوراء في هذا الإطار، وبما أن قوة الاحتكاك محدَّدة، فإن سرعة القرص (بالنسبة إلى الأرضية) لا تزال $\vec{v}_0$ بمجرد أن يكون القرص على السير.

قوة الاحتكاك الحركي هي μmg، وm هي كتلة القرص؛ ومن ثَمَّ يكون مقدار العجلة على طول المسار μg. وبالنظر إلى المركبة y لحركة القرص، تكون العجلة نتيجة للاحتكاك هي:

$$a_y = -\mu g \cos\theta = \mu g \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + V^2}}. \tag{3-26}$$

أقل قيمة لـ v_0 تجعل المركبة y لسرعة القرص تصل إلى صفر، بمجرد أن يصل القرص إلى حافة السير الأخرى؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_0^2 + 2a_y y, \\ 0 &= v_0^2 - \frac{2\mu g v_0 D}{\sqrt{v_0^2 + V^2}} \implies \\ v_0^4 &= \frac{(2\mu g D)^2 v_0^2}{v_0^2 + V^2}. \end{aligned} \tag{3-27}$$

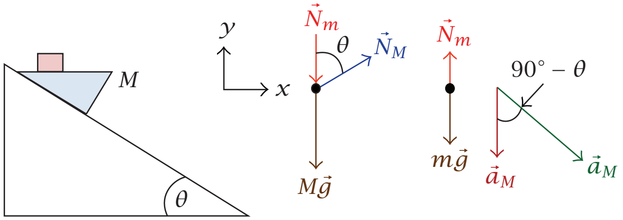
يمكننا أيضا الوصول لهذه المعادلة عن طريق اعتبار حركة على طول القطر. في هذه الحالة يكون لدينا:

$$
\begin{aligned}
0 &= v_0^2 + V^2 - 2\mu g \frac{D}{\cos\theta} \Rightarrow \\
&= \sqrt{v_0^2 + V^2} - \frac{2\mu g D}{v_0} \Rightarrow \\
v_0^4 &= \frac{(2\mu g D)^2 v_0^2}{v_0^2 + V^2}.
\end{aligned} \tag{3-28}
$$

استبدل المتغيرات لجعل $u = v_0^2$ مع ملاحظة أن:

$$
\begin{aligned}
u^2 &= \frac{(2\mu g D)^2 u}{u + V^2} \Rightarrow \\
u\left(u + V^2\right) &= (2\mu g D)^2 \Rightarrow \\
u &= \frac{-V^2 + \sqrt{V^4 + 16(\mu g D)^2}}{2} \\
&= \frac{-(6.00\,\mathrm{m/s})^2 + \sqrt{(1296\,\mathrm{m^4/s^4}) + 16[(0.2)(9.8)(3)]^2\,\mathrm{m^4/s^2}}}{2}. \\
u &= 3.50\,\mathrm{m^2/s^2} \Rightarrow \\
v_0 &= 1.87\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned} \tag{3-29}
$$

(٣-١٠) مخططات الجسم الحر للوتد والقالب فوقه مبيَّنَة في شكل ٣-٨. نعلم بالنظر إلى القوى المؤثرة أنه لا توجد حركة أفقية للقالب في الإطار القصوري للمنحدر الثابت؛ لأنه لا توجد قوًى لها مركبة أفقية تؤثِّر على القالب؛ ومن ثَمَّ فإن القالب يحافظ على تلامُسِه مع الوتد فقط إذا كانت عجلتاهما الرأسيتان متطابقتين، بينما ينزلق الوتد أيضًا أفقيًّا بالنسبة إلى المنحدر أو القالب. ليكن مقدار عجلة الوتد على طول المنحدر هو a_M. اتجاه $\vec{a}_M$ يكون على طول المنحدر بزاوية θ أسفل الأفقي. لتكن $\vec{N}_M$ القوة



شكل ٣-٨: مخطط المسألة (٣-١٠).

العمودية للمنحدر على الوتد، و$\vec{N}_m$ القوة العمودية للوتد على القالب. تكون معادلات الحركة على النحو التالي:

$$m\colon N_m - mg = -ma_M \sin\theta,$$

$$M, y\colon N_M \cos\theta - N_m - Mg = -Ma_M \sin\theta. \tag{3-30}$$

$$M, x\colon N_M \sin\theta = Ma_M \cos\theta.$$

الحل الآني لهذه المعادلات الثلاث في المجاهيل الثلاثة N_M وN_m وa_M هو:

$$N_M = \frac{(m+M)\,Mg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta},$$

$$N_m = \frac{mMg\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta}, \tag{3-31}$$

$$a_M = \frac{(m+M)\,g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}.$$

العجلة $\vec{a}_M$ الموازية للمنحدر هي الحل المطلوب.

يمكننا استخدام حساباتٍ أقل لإيجاد الحلِّ إذا لاحظنا أن عجلة القالب على طول الاتجاه الرأسي ينبغي أن تكون:

$$a_y = a_M \sin\theta \tag{3-32}$$

وعجلته على طول اتجاه السطح المائل هي:

$$a_y \cos\,(90^\circ - \theta) = a_M \sin^2\theta. \tag{3-33}$$

بالنظر إذنْ إلى مركبتي القوة الموازيتين للسطح المائل على كلٍّ من الوتد والقالب، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - N_m \sin\theta &= m a_M \sin^2\theta, \\ Mg\sin\theta + N_m \sin\theta &= M a_M. \end{aligned} \tag{3-34}$$

بجمع المعادلتين نحصل فورًا على عجلة الوتد:

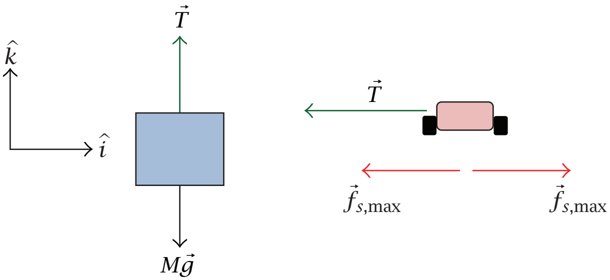
$$\begin{aligned} (m+M)\,g\sin\theta &= a_M\left(M + m\sin^2\theta\right) \Longrightarrow \\ a_M &= \frac{(m+M)\,g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{3-35}$$

(٣-١١) لكي تكون M في حالة اتزان ينبغي أن يكون الشدُّ في الخيط مساويًا للوزن Mg؛ ومن ثَمَّ يُوضَع الشرطان لأقل وأقصى نصف قطر للُعبة السيارة عندما تكون أقصى قوةِ احتكاكٍ استاتيكيٍّ متجهةً إلى الداخل والخارج، على التوالي، بالنسبة إلى مركز المسار الدائري (انظر شكل ٣-٩). يتضح لنا ذلك لأن شرط الجذب المركزي يتطلَّب، طبقًا للشكل ٣-٩:

$$\vec{T} + \vec{f}_s = -\frac{mv^2}{r}\hat{\imath} \Longrightarrow\ -\,(T \pm f_s)\,\hat{\imath} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\imath}, \tag{3-36}$$

حيث $-\hat{\imath}$ هو الاتجاه نحو مركز المسار الدائري؛ ومن ثَمَّ يكون هو نفسه اتجاه الشد. اتجاه الشد ثابت على طول $-\hat{\imath}$، لذلك فإن الاتجاه (أي الإشارة) اللازم لـ $\vec{f}_s$ يتعيَّن بواسطة مقدار قوة الاحتكاك، بحيث تكون المعادلة المتجهية بالأعلى صحيحة. في الصورة القياسية، يتحدَّد شرطَا الاحتكاك على النحو التالي:

$$\begin{aligned} T + \mu mg &= \frac{mv^2}{r_{\min}}, \\ T - \mu mg &= \frac{mv^2}{r_{\max}} \Longrightarrow \end{aligned} \tag{3-37}$$



شكل ٣-٩: مخطط الجسم الحر للمسألة (٣-١١).

وحيث إن $T = Mg$، فإنه بقسمة المعادلة الأولى على الثانية ينتج:

$$\frac{r_{\text{max}}}{r_{\text{min}}} = \frac{(M + \mu m)\, g}{(M - \mu m)\, g} = \frac{M + \mu m}{M - \mu m}. \tag{3-38}$$

الفصل الرابع

كمية التحرك

(١) حلول مسائل كمية التحرك

(٤-١) لاحِظ أن تعريف موضع مركز الكتلة بالنسبة إلى نقطة الأصل هو:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \tag{4-1}$$

لكل جسيم n في النظام:

$$\begin{aligned} \left|\vec{R} - \vec{r}_n\right|^2 &= \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} - \vec{r}_n\right) \cdot \left(\frac{\sum_j m_j \vec{r}_i}{M} - \vec{r}_n\right) \\ &= \frac{1}{M^2}\left[\sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_n\right)\right] \cdot \left[\sum_j m_j \left(\vec{r}_j - \vec{r}_n\right)\right]. \end{aligned} \tag{4-2}$$

والآن فإن المقدار $(\vec{r}_i - \vec{r}_n) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_n)$ لا يتغير تحت جميع الحركات المحتملة للجسم الجاسئ الذي يتكون من m_i، وm_j، وm_n؛ ومن ثَمَّ لا تتغير مسافةُ بُعْدِ مركز الكتلة عن جميع الجسيمات (ذات معامل n) في الجسم تحت جميع الحركات للجسم، وبالتالي فإن مركز الكتلة هو نقطة من نقط الجسم.

(٤-٢) القوة الكلية على الأرضية عند أي كمية معطاة من الجزء الساقط من الحبل y، وهي أي مسافة y يُسقِطها طرفُ الحبل العلوي أسفل نقطةِ تحرُّرِه الابتدائيةِ، وبالتالي يكون الطول الكلي من الحبل الموجود على الأرضية هو y، تكون:

$$F(y) = \frac{dp}{dt} + mg, \tag{4-3}$$

حيث dp/dt تمثِّل القوة اللازمة لجعل طولٍ متناهٍ من الحبل كتلتُه dm يتوقَّف إذا كانت السرعةُ التي اكتسبها أثناء سقوطه v. m هي كتلة الحبل الموجود بالفعل على المنضدة؛ ومن ثَمَّ تساوي λy؛ حيث $\lambda = M/L$. لأي طول متناهٍ من الحبل dm، يمكن تسمية السرعة اللحظية v؛ حيث $v^2 = 2gy$؛ وذلك لأننا نعتبر dm في حالة سقوطٍ حرٍّ، وبالتالي يكون $dp = dmv$ و$dm = \lambda \cdot dy$؛ حيث dy الطول المتناهي المناظِر للكتلة dm؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} F(y) &= v\frac{dm}{dt} + \lambda y g \\ &= v \cdot \left(\frac{\lambda dy}{dt}\right) + \lambda y g \\ &= v^2\lambda + \lambda y g, \end{aligned} \tag{4-4}$$

$$F(y) = 2gy \cdot \lambda + \lambda y g = 3\lambda g y.$$

للإجابة على الجزء (ب). لاحظنا للتو أن أقصى قوة تتحقَّق عندما يكون y قيمة عظمى، بمعنى أن $y = L$، تكون عندئذٍ القوة العظمى $3Mg$ وتتحقَّق عندما ترتطم آخِرُ قطعة من الحبل بالمنضدة. هذه النتيجة معقولة لأن آخِر dm ترتطم بأقصى مقدار للسرعة (لأنها تسقط من أقصى ارتفاع L)، والوزن الأكبر (تقريبًا) من الحبل يكون بالفعل على المنضدة.

(٤-٣) (أ) بقاء كمية التحرُّك الخطي يتطلب:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2, \tag{4-5}$$

حيث $\vec{p}_1$ و$\vec{p}_2$ هما كميتَا التحرك للشظيتين ١ و٢، على التوالي. ينبغي أن تتطاير الشظيتان في اتجاهين على نفس الخط؛ إذنْ يمكن تعيينُ السرعتين الأفقيتين من المسافتين المقطوعتين والزمنين المعطيين كالتالي:

$$\begin{aligned} v_{1x} &= \frac{120\,\text{m}}{10.0\,\text{s}} = 12.0\,\text{m/s}, \\ v_{2x} &= \frac{24.0\,\text{m}}{4.00\,\text{s}} = 6.00\,\text{m/s}. \end{aligned} \tag{4-6}$$

بمعلومية أن مجموع كميات التحرُّك على طول المحور x ينبغي أن يكون صفرًا، يكون لدينا:

$$p_{1x} = m_1 v_{1x} = p_{2x} = m_2 v_{2x} \Longrightarrow \tag{E-1}$$

$$m_2 = m_1 \frac{12.0}{6.00} = 2m_1. \tag{E-2}$$

عندما يصل الصاروخ لأعلى نقطة تكون سرعته صفرًا؛ ومن ثَمَّ ينبغي أن تكون كميتَا التحرك الرأسيتان للشظيتين متساويتين في المقدار ومختلفتين في الإشارة:

$$m_1 v_{1y} = -m_2 v_{2y} \Longrightarrow v_{1y} = -2v_{2y}. \tag{4-7}$$

إذا استخدمنا موقعَ الانفجار على أنه نقطة الأصل لنظام محاورنا، فإن السقوط الرأسي للشظيتين يُوصَف على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
-h &= v_{1y}\,(10\,\text{s}) - \frac{9.8\,\text{m/s}^2}{2}\left(100\,\text{s}^2\right),\\
-h &= \left(10v_{1y} - 490\right)\,\text{m},\\
-h &= v_{2y}\,(4\,\text{s}) - \frac{9.8\,\text{m/s}^2}{2}\left(16\,\text{s}^2\right)\\
&= \left(-2v_{1y} - 78.4\right)\text{m} \Longrightarrow\\
10v_{1y} - 490 &= -2v_{1y} - 78.4 \Longrightarrow\\
v_{1y} &= 34.3\,\text{m/s} \Longrightarrow v_{2y} = -17.2\,\text{m/s} \Longrightarrow\\
h &= (4\,\text{s})\,(17.15\,\text{m/s}) + 78.4\,\text{m}\\
&= 147\,\text{m}.
\end{aligned} \tag{4-8}$$

(ب) بالعلم أن الشظية ١ تذهب لأعلى، نحصل على أقصى ارتفاعٍ باستخدام حركة الشظية. باتخاذ نقطة الأصل عند الأرضية، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} 0 &= v_{1y}^2 - 2\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(y_{\max} - 147\,\mathrm{m}\right) \Rightarrow \\ y_{\max} &= 147\,\mathrm{m} + \frac{(34.3\,\mathrm{m/s})^2}{19.6\,\mathrm{m/s^2}} = 207\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{4-9}$$

(٤-٤) ينبغي أن تكون كمية التحرُّك محفوظةً في كلٍّ من الاتجاهين الموازي والمتعامِد مع اتجاه الهيكل الأصلي (أي في اتجاه الشرق). بالإضافة إلى ذلك، فإن الكتلة محفوظة. المعادلات الثلاث الناتجة من هذه الحالات تكون على النحو التالي:

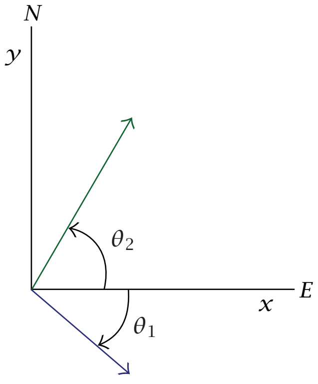
$$\begin{aligned} &\text{mass: } m_1 + m_2 = M = 3.00\,\mathrm{kg}, \\ &x\text{: } Mv_0 = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2, \\ &y\text{: } 0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2. \end{aligned} \tag{4-10}$$

من معادلة y ومعادلة حفظ الكتلة نحصل على:

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}. \tag{4-11}$$

بالتعويض في معادلة x ينتج:

$$\begin{aligned} Mv_0 &= m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_1 v_1 \sin\theta_1 \cot\,\theta_2 \Rightarrow \\ m_1 &= \frac{Mv_0}{v_1\left[\cos\theta_1 + \sin\theta_1 \cot\,\theta_2\right]} \\ &= \frac{(3.00\,\mathrm{kg})\,(350\,\mathrm{m/s})}{(900\,\mathrm{m/s})\left[\cos 20.0^\circ + (\sin 20.0^\circ)\,(\cot 40.0^\circ)\right]}, \\ m_1 &= 0.866\,\mathrm{kg} \Rightarrow m_2 = 3.00 - 0.866 = 2.134\,\mathrm{kg}. \end{aligned} \tag{4-12}$$



شكل ٤-١: مخطط المسألة (٤-٤).

إذنْ فإن:

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{0.866\,\text{kg}}{2.134\,\text{kg}} (900\,\text{m/s}) \frac{\sin 20.0^\circ}{\sin 40.0^\circ}, \tag{4-13}$$

$$v_2 = 194\,\text{m/s}.$$

ملحوظة: كثير من الطلاب يخفقون في هذه المسألة لأن لديهم معادلتين (كميتَي التحرك في x وy) في ثلاثة مجاهيل، ويجهلون أن القيد على مجموع كتل الشظيات يشكل المعادلة الثالثة!

(٤-٥) قوة الدفع هي قوةٌ مقدارُها يساوي المعدل الزمني للتغيُّر في كميةِ تحرُّكِ غاز العادم. المعدل الزمني للتغيُّر في كتلة الصاروخ هو المعدل الزمني لكتلة الوقود المستهلَك في صورة غاز العادم؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} \left|\frac{dM}{dt}\right| &= \frac{\text{fuel burned}}{\text{burn time}} \\ &= \frac{2.300 \times 10^6\,\text{kg} - 1.310 \times 10^5\,\text{kg}}{150\,\text{s}} \\ &= 1.446 \times 10^4\,\text{kg/s}. \end{aligned} \tag{4-14}$$

ومن ثَمَّ تكون قيمةُ قوة الدفع T هي:

$$\begin{aligned} T &= u\left|\frac{dM}{dt}\right| \implies \\ u &= \frac{T}{|dM/dt|} \\ &= \frac{3.402\times10^{7}\,\text{N}}{1.446\times10^{4}\,\text{kg/s}}, \\ u &= 2.35\times10^{3}\,\text{m/s}. \end{aligned} \tag{4-15}$$

ينبغي أن نذكر أن معادلة الصاروخ المثالية (4.29) ليست دقيقة جدًّا هنا؛ لأنه كان علينا اعتبارُ تأثيرِ الجاذبية. التعديل يطرأ على (4.27) بحيث ينبغي علينا — بدلًا من التعامل مع كمية التحرك على أنها محفوظة — أن نبحث عن التغير في كمية التحرُّك نتيجة قوة الجاذبية الخارجية، وهو:

$$\begin{aligned} (Mv - Mgdt)\,\hat{i} &= (M+dM)\,(v+dv)\,\hat{i} - dM\,(v-u)\,\hat{i} \implies \\ Mv - Mgdt &= Mv + Mdv + vdM + dMdv - vdM + udM \implies \\ Mdv &= -udM - Mgdt, \end{aligned} \tag{4-16}$$

حيث أزلنا حاصل ضرب التفاضلين، ونلاحظ أن dM سالبة. بقسمة الأطراف على M كما في الفصل الرابع، وحذف dt مع ملاحظة أن:

$$dt = \frac{dM}{dM/dt} \tag{4-17}$$

ينتج أن:

$$dv = -u\frac{dM}{M} - g\frac{dM}{dM/dt}. \tag{4-18}$$

بالتفاضُل نحصل على (تذكَّرْ أنَّ $dM < 0$):

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -u\int_{M_0}^{M} \frac{dM'}{M'} - \frac{g}{dM/dt}\int_{M_0}^{M} dM' \Rightarrow$$
$$v - v_0 = -u\ln\frac{M}{M_0} - g\frac{M - M_0}{dM/dt}. \tag{4-19}$$

تكون معادلة الصاروخ المثالية المعدلة بالجاذبية هي:

$$v = v_0 - u\ln\left(\frac{M}{M_0}\right) - g\frac{M - M_0}{dM/dt}. \tag{4-20}$$

هناك افتراضان استُخِدَمَا هنا: الأول أن الارتفاع ٦٧ كيلومترًا هو ارتفاع منخفض بدرجةٍ كافيةٍ بالنسبة إلى نصف قطر الكرة الأرضية، بحيث يمكننا الاستمرار في استخدام القيمة $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$ كعجلة للجاذبية. والثاني أنه عند $t = 0$ فإن:

$$M_0\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} - M_0 g > 0 \Rightarrow -u\frac{dM}{dt} > M_0 g, \tag{4-21}$$

وإلا فإن الصاروخ لا يغادر من البداية، وإنما يظل على قاعدة الإطلاق حارقًا الوقود حتى تصبح الكتلة الكلية صغيرةً بالقدر الكافي الذي يسمح لقوة الدفع برفع الصاروخ.

الأرقام ذات الصلة بهذه المسألة تتطلَّب إيجادَ الكتلة بعد نهاية أول مرحلةٍ للاحتراق. هذه الأرقام هي:

$$M_0 = 2.80 \times 10^6\,\mathrm{kg},$$
$$M = \text{launch mass} - \text{mass of 1st stage} = \left(2.8 \times 10^6 - 2.3 \times 10^6\right)\mathrm{kg},$$
$$u = \text{exhaust velocity} = 2.35 \times 10^3\,\mathrm{m/s},$$
$$t = \text{time for first stage} = 150\,\mathrm{s}. \tag{4-22}$$

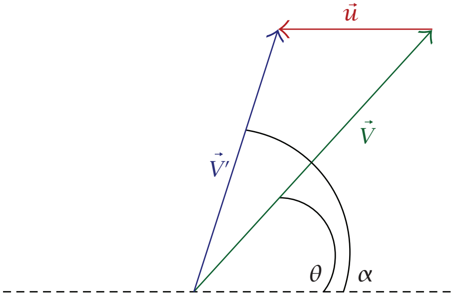
ومن ثَمَّ فإن سرعةَ الصاروخ على ارتفاع ٦٧ كيلومترًا تكون:

$$\begin{aligned} v &= 0 - \left(2.35 \times 10^3\,\mathrm{m/s}\right) \ln\left(\frac{5.00 \times 10^5\,\mathrm{kg}}{2.80 \times 10^6\,\mathrm{kg}}\right) \\ &\quad - \left(9.80\,\mathrm{m/s^2}\right)(150\,\mathrm{s}) \\ &= 2.578 \times 10^3\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{4–23}$$

(٤-٦) نعلم سرعة القذيفة، ولكن في إطارٍ لاقصوريٍّ. أثناء تسارُعِ القذيفة داخل ماسورة المدفع، تعني حقيقة أن القذيفة تتسارع أن هناك قوةً تؤثِّر عليها بواسطة المدفع؛ ومن ثَمَّ فلا بد أن هناك قوةً تؤثِّر على المدفع بواسطة القذيفة طبقًا لقانون نيوتن الثالث. مع خروج القذيفة من المدفع، تتحرك بزاوية α بالنسبة إلى الأفقي في الإطار القصوري (الثابت بالنسبة إلى الأرض). يمكن حسابُ مقدار سرعة العربة المسطَّحَة؛ لأن كمية تحرُّك النظام على طول الاتجاه الأفقي (x) محفوظ بسبب عدم وجود قوًى مؤثِّرة على طول x. لنُسَمِّ مقدار سرعة العربة المسطحة على طول المحور x بمجرد خروج القذيفة من ماسورة المدفع u. الشكل ٤-٢ هو الرسم البياني المتجهي المناسب لإيجاد سرعة القذيفة؛ حيث $\vec{V}'$ السرعة النهائية للقذيفة بالنسبة إلى الأرض. يؤدِّي حفظ كمية التحرُّك على طول المحور x (بفرض أن اليمين هو الاتجاه الموجب لـ x) إلى:

$$\begin{aligned} mV' \cos\alpha &= Mu \\ mV\cos\theta - mu &= Mu \Longrightarrow \\ u &= \frac{mV\cos\theta}{m+M}. \end{aligned} \tag{4–24}$$

تُشتَقُّ الزاوية α من الرسم البياني المتجهي بملاحظة أن $V'_y = V_y$، مما يعني أن المركبتين الرأسيتين متساويتان، ومركبة $\vec{V}'$ الأفقية سبق أن حسبناها بالفعل؛



شكل ٤-٢: متجهات السرعة للمسألة (٤-٦).

إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} V'_y &= V'\sin\alpha = V\sin\theta, \\ V'_x &= V'\cos\alpha = \frac{Mu}{m} \implies \\ \frac{V'_y}{V'_x} &= \tan\alpha = \frac{m}{Mu}\cdot V\sin\theta \implies \\ &= \frac{mV\sin\theta}{M}\cdot\frac{m+M}{mV\cos\theta}, \\ \tan\alpha &= \frac{m+M}{M}\tan\theta. \end{aligned} \tag{4-25}$$

الفصل الخامس

الشغل والطاقة

(١) حلول مسائل الشغل وحفظ الطاقة

(٥-١) افترِضْ أن المضرب والكرة تقابَلَا في تصادُمٍ مرنٍ أحادي البُعْد، يترك فيه مبدأُ حفظِ طاقة الحركة حصةً أكبر من الطاقة للكرة لتُناظِرَ أقصى سرعة يمكن أن تحصل عليها. في مثل هذه الحالة يمكننا استخدامُ معادلة استبدال السرعة، وهي $v_{\text{ball}} - v_{\text{racket}} = -(u_{\text{ball}} - u_{\text{racket}})$؛ حيث u توضِّح السرعة الابتدائية، وv توضح السرعة النهائية بعد التصادُم مباشَرةً. باستخدام هذا، نرى أن السرعة النسبية للمضرب والكرة تصبح:

$$v_{\text{ball}} - v_{\text{racket}} = -\left(-u_{\text{ball}} - u_{\text{racket}}\right), \qquad (5\text{–}1)$$

حيث ظهرت القيمة $-u_0$ لأن الكرة تتحرك عكس اتجاه المضرب (والذي نفترض أنه الاتجاه الموجب لـ x). برغم أن المضرب محمول بواسطة اللاعب، وسرعته لا تتغير (على الأقل بكمية ملحوظة)؛ إذنْ فإن $v_{\text{racket}} = u_1$؛ ومن ثَمَّ:

$$v_{\text{ball}} - u_{\text{racket}} = u_{\text{ball}} + u_{\text{racket}} \Longrightarrow v_{\text{ball,max}} = u_{\text{ball}} + 2u_{\text{racket}}. \qquad (5\text{–}2)$$

حتى لو لم تكن تعلم معادلةَ استبدال السرعة، يمكنك تخيُّلُ التصادم في إطارٍ قصوريٍّ متحركٍ بنفس سرعة المضرب الثابتة. يبدو المضرب في هذا الإطار كحائطٍ ساكن، وتقترب الكرة من الحائط بسرعةٍ مقدارُها $u_{\text{ball}} + u_{\text{racket}}$، ثم ترتدُّ بسرعةٍ مساوية المقدار في الاتجاه المعاكس. بالنسبة إلى الأرض، تكون سرعة الكرة المرتدة هي $u_{\text{ball}} + 2u_{\text{racket}}$.

(٥-٢) لتكن u سرعة القالب بالنسبة إلى الوتد. نستخدم هذه السرعة لأن اتجاهها معروف دائمًا بالنسبة إلى الوتد. بالنسبة إلى نظام القالب والوتد بدون المنضدة التي يرتكز عليها الوتد، يكون لدينا (بافتراض أن المحور x على طول الأفقي وx+ نحو اليمين):

$$\begin{aligned}
\sum P_x = 0 &= -MV + m\left(u\cos\theta - V\right) \Longrightarrow \\
u\cos\theta &= \frac{M+m}{m}V \Longrightarrow \\
u &= \frac{M+m}{m}\frac{V}{\cos\theta} \Longrightarrow \\
u\sin\theta &= \frac{M+m}{m}V\tan\theta,
\end{aligned} \tag{5-3}$$

حيث V مقدار سرعة الوتد. باستخدام حفظ الطاقة وبالتعويض بالقيمة $u\cos\theta$ عن معادلة كمية التحرك، يكون لدينا:

$$\mathrm{KE}_0 + U_0 = \mathrm{KE}_{\mathrm{final}} + U_{\mathrm{final}},$$

$$\begin{aligned}
mgh &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(u\cos\theta - V\right)^2 + \left(u\sin\theta\right)^2\right] \Longrightarrow \\
2mgh &= MV^2 + m\left[\left(\frac{M}{m}V + V - V\right)^2 + \left(\frac{M+m}{m}V\tan\theta\right)^2\right] \\
&= V^2\left[M + \frac{M^2}{m} + \frac{(M+m)^2}{m}\tan^2\theta\right] \Longrightarrow \\
2m^2gh &= V^2\left[M\left(M+m\right) + \left(M+m\right)^2\tan^2\theta\right] \Longrightarrow \\
\frac{2m^2gh}{M+m} &= V^2\left[M + \left(M+m\right)\tan^2\theta\right] \\
&= V^2\left[\frac{M\cos^2\theta + M\sin^2\theta + m\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right] \Longrightarrow \\
V &= \sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\theta}{\left(M+m\right)\left(M+m\sin^2\theta\right)}}.
\end{aligned} \tag{5-4}$$

(٥-٣) (أ) تتحقَّق أقصى سرعةٍ للقافز في النقطة التي عندها يؤثِّر حبلُ القفز بقوةٍ تُبطل الجاذبية (النقطة التي تكون عندها عجلة القافز صفرًا). بعد هذه النقطة يكون اتجاه العجلة لأعلى، ويتباطأ القافز حتى يصل إلى السكون لحظيًّا ثم يتسارع لأعلى.

$$\begin{aligned} F_{\text{jumper}} &= mg - kx = 0 \implies \\ x &= \frac{mg}{k} \\ &= \frac{(80.0\,\text{kg})\,(9.80\,\text{m/s}^2)}{200\ \text{N/m}} \\ x &= 3.92\,\text{m}. \end{aligned} \tag{5-5}$$

ومن ثَمَّ تتحقَّق السرعة القصوى عند ٥٣٫٩ مترًا.

(ب) تتحقق السرعة القصوى عندما يستطيل طولُ حبل القفز بمقدار ٣٫٩٢ أمتار؛ إذنْ، بضبط نقطة أصل نظام المحاور عند ٥٠ مترًا أسفل الكوبري نجد أن:

$$\begin{aligned} \text{KE}_0 + \text{PE}_0 &= \text{KE}_f + \text{PE}_f \\ 0 + mg\,(50.0) &= \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 + mg\,(-3.92\,\text{m}) + \frac{1}{2}k(3.92\,\text{m})^2 \implies \\ v_{\text{max}} &= \sqrt{2\,(9.80\,\text{m/s}^2)\,(53.92\,\text{m}) - \frac{(200\,\text{N/m})\,(3.92\,\text{m})^2}{80.0\,\text{kg}}} \\ &= 32.4\,\text{m/s}. \end{aligned} \tag{5-6}$$

(ج) تتحقَّق العجلة القصوى عند أقصى قوة محصلة تؤثِّر على القافز. قبل الوصول إلى ٥٠ مترًا تكون عجلةُ الجاذبية هي فقط المؤثِّرة؛ ومن ثَمَّ فإن عجلة القافز $9.80\,\text{m/s}^2$. وبمجرد أن يستطيل حبلُ القفز بقدرٍ أكبر من ٣٫٩٢ أمتار، تكون القوة المحصلة لأعلى. يكون السؤال عندئذٍ عما إذا كانت القوة المحصلة لأي نقطة $kx - mg > |mg|$ قبل أن تصل السرعة إلى صفر؛ لأنه عند نقطة التوقُّف يكون الحبل عند أقصى طولٍ لهذا القافز

ومؤثِّرًا بأقصى قوة لأعلى. وبالتالي نريد إيجاد أقصى تمدُّدٍ للحبل، $x_{\max}$. للاختصار اجعلْ $mg/k = \delta$.

$$\begin{aligned} mg\,(50.0 + x) &= \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \implies \\ 100\delta + 2\delta x_{\max} &= x_{\max}^2 \implies \\ x_{\max}^2 - 2\delta x_{\max} - 100\delta &= 0 \implies \\ x_{\max} &= \delta\left[1 + \sqrt{1 + \frac{100}{\delta}}\right]. \end{aligned} \tag{5-7}$$

آخِر خطوة ما هي إلا الحل المعتاد للمعادلة التربيعية ولكن بصورة مبسَّطَة. قيمة δ هي:

$$\delta = \frac{(80.0\,\text{kg})\,(9.80\,\text{m/s}^2)}{200\,\text{N/m}} = 3.92\,\text{m}. \tag{5-8}$$

إذنْ فإن:

$$x_{\max} = (3.92\,\text{m})\left[1 + \sqrt{1 + \frac{100\,\text{m}}{3.92\,\text{m}}}\right] = 24.1\,\text{m}. \tag{5-9}$$

يؤدي هذا بالفعل إلى عجلة متجهة لأعلى أكبر من $9.80\,\text{m/s}^2$ في المقدار.

$$\begin{aligned} kx_{\max} - mg &= (200\,\text{N/m})\,(24.1\,\text{m}) - (80.0\text{ kg})\left(9.80\,\text{m/s}^2\right) \\ &= 4036\,\text{N} > m\,|g|\,. \end{aligned} \tag{5-10}$$

تزيد kx زيادةً رتيبةً بحيث تكون الإزاحة القصوى مناظِرة دائمًا للقوة القصوى لأعلى؛ ومن ثَمَّ أكبر عجلة.

(د) قيمة العجلة القصوى مشتقة من:

$$\begin{aligned} F &= kx_{\max} - mg \\ &= mg\left[1 + \sqrt{1 + \frac{100}{\delta}} - 1\right] \Rightarrow \\ a_{\max} &= \left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)\left[\sqrt{1 + \frac{100\,\mathrm{m}}{3.92\,\mathrm{m}}}\right] = 50.4\,\mathrm{m/s^2}. \end{aligned} \tag{5-11}$$

التعرُّض لخمسة أضعاف عجلة الجاذبية هو تجربة ضاغطة بحق.

(هـ) أقصى مسافة من الجسر هي ٥٠ مترًا بالإضافة إلى $x_{\max}$؛ أي ٧٤٫١ مترًا. تحتاج إذنْ إلى جسر عالٍ!

(٥-٤) K هو ثابت قانون هوك للحبل الذي يكون طوله قبل الاستطالة ١ (بوحدات طول اختيارية)، وهذا يعني أنه إذا أثَّرَتْ قوتان متساويتان في المقدار F ومتضادتان في الاتجاه على كلا الطرفين، فإن الحبل سوف يستطيل ليصل طوله إلى $1 + F/K$، بمعنى أن $F = K \cdot x$ (x هي التغير في الطول). افترِض الآن أن لدينا قطعةً من نفس نوع الحبل طولها قبل الاستطالة L؛ حيث L عدد صحيح من وحدة الأطوال. يمكننا وضع علامات على الحبل، تقوم بتقسيم الحبل نظريًّا إلى L قطعة (لاحظ أن L عدد صحيح ليس له وحدات) متساوية في الطول. إذا أثَّرَتْ قوتان متساويتان في المقدار F ومتضادتان في الاتجاه على الطرفين، فإنَّ كلَّ قطعة ستكون في اتزانٍ ميكانيكيٍّ وتؤثر عليها قوتان F متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه تسحبانها من كلا الطرفين؛ ومن ثَمَّ فإن الزيادة في طول كلِّ قطعة هي F/K، والزيادة في طول الحبل هي LF/K. يُعرِّف ثابت قانون هوك k للحبل بأنه $F = k \cdot x$ (حيث x التغير في الطول)؛ ومن ثَمَّ فإن $k = F/(LF/K) = K/L$.

إذا كنتَ مراوغًا وترغب في معرفة كيف تمتدُّ بالبرهان ليشمل القِيَم غير الصحيحة من L، اقسم الحبل نظريًّا وهو قبل الاستطالة إلى قطع عديدة صغيرة جدًّا، طول كلٍّ منها Δ. يمكنك بنسبة خطأ مهملة افتراض أن $1/\Delta$ وL/Δ أرقام صحيحة. عدد القطع في جزء من الحبل طوله الوحدة هو $1/\Delta$. إذا كان ثابت قانون هوك لكل قطعة صغيرة

هو α، فإن البرهان التالي يوضِّح أن ثابت قانون هوك لجزءٍ من الحبل (قبل الاستطالة) طوله الوحدة هو $\alpha/(1/\Delta) = \alpha\Delta$؛ ومن ثَمَّ فإن $K = \alpha\Delta$. عدد القطع في حبل طوله L هو L/Δ، وبالتالي فإن ثابت قانون هوك للحبل هو $k = \alpha/(L/\Delta) = \alpha\Delta/L = K/L$، وهو المطلوب برهانه.

قافز حبال كتلته M لديها عدد من الحبال المختلفة، مقطوعة كلها من نفس البكرة الكبيرة ولكن بأطوال L مختلفة. يختار حبلًا ويربط أحدَ طرفيه في قضيبٍ على الجسر، والطرفَ الآخَر في الأحزمة التي يرتديها، ثم يقفز. نريد أن نبيِّن أن أقصى شدٍّ ناتج يكون هو نفسه لجميع الحبال، بمعنى أن $T_{\max}$ تلك لا تعتمد على L.

من الواضح أن أقصى شدٍّ يحدث عندما يتمدَّد الحبلُ لأقصى قدرٍ، بمعنى أنه عندما يكون القافز عند أقل نقطة له (نقطة الانخفاض) وسرعته صفرًا. ليكن طول الحبل عند هذه النقطة $L+x$. نعتبر طاقة الجهد التثاقلية للقافز صفرًا عند الجسر، وبالتالي تساوي $-Mg(L+x)$ عند النقطة المنخفضة. ولأن كتلة الحبل أقل بكثيرٍ من كتلة القافز، فإننا نهمل طاقةَ جهده التثاقلية. طاقة الجهد للحبل قبل الاستطالة صفر، وطاقة الجهد للحبل بعد الاستطالة $(1/2)kx^2$. طاقة حركة القافز تكون صفرًا عند كلٍّ من الجسر ونقطة الانخفاض.

ومن ثَمَّ فإن $0 = -Mg(L+x) + (1/2)kx^2$. نستطيع حلَّ هذه المعادلة التربيعية في جذرها الموجب، ثم حساب أقصى شد $T_{\max} = kx = (K/L)x$. إذا كانت عبارة المسألة صحيحة، فإن $T_{\max}$ لا تعتمد على L، بمعنى أن x/L لا تعتمد على L. يمكننا تبيُّن ذلك دون حتى أن نحلَّ المعادلة التربيعية. ليكن $y = x/L$؛ إذنْ فإن $x = yL$ وتكون معادلتنا هي:

$$\begin{aligned} 0 &= -Mg\left(L + yL\right) + \frac{1}{2}\left(K/L\right)\left(yL\right)^2 \Longrightarrow \\ &= -Mg\left(1 + y\right) + \frac{1}{2}Ky^2. \end{aligned} \tag{5-12}$$

لاحِظْ أن L اختفت، وبالتالي فمن الواضح أن y و$T_{\max}$ لا تعتمدان على L. هذه الحقيقة معروفة لكثيرٍ من القافزين ومتسلِّقي الصخور.

(٥-٥) نهدف إلى إثبات أنه إذا كانت كميةُ التحرُّكِ الخطية محفوظةً في إطارٍ ما، بمعنى أنه لأي نظام يتكون من n جسيم فإن:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{jf}, \tag{5-13}$$

حيث يشير الرمزان السفليان i وf إلى السرعة قبل التصادم وبعده، فإنها إذنْ صحيحة لجميع الأُطر الأخرى. يمكننا كتابة كميتَيِ التحرك الابتدائية والنهائية في أيِّ إطارٍ قصوريٍّ آخَر يتحرك بسرعة $\vec{V}$ بالنسبة إلى الإطار القصوري الأول كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{ji} - \vec{V} \sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{jf} - \vec{V} \sum_{j=1}^{n} m_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \left(\vec{v}_{ji} - \vec{V}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\vec{v}_{jf} - \vec{V}\right) \tag{5-14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}'_{ji} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}'_{jf}.$$

ومن ثَمَّ فإن كمية التحرك محفوظة في الإطار القصوري الجديد. نتحول الآن إلى مناقشة طاقة الحركة المصاحبة للحركة. مبدأ حفظ طاقة الحركة هو:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j v_{ji}^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j v_{jf}^2. \tag{5-15}$$

ولإطار قصوري آخَر A'، كما ذُكِر من قبلُ هو:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j {v'_{ji}}^2 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left(\vec{v}_{ji} - \vec{V}\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left[v_{ji}^2 - 2\vec{V} \cdot \vec{v}_{ji} + V^2\right] \Longrightarrow \qquad (5\text{-}16) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left[v_{jf}^2 - 2V \cdot \vec{v}_{ji} + V^2\right], \end{aligned}$$

حيث إن السطر الأخير من معادلتنا السابقة لحفظ طاقة الحركة في الإطار القصوري الأصلي. حفظ كمية التحرُّك في الإطار القصوري الأصلي يعني أن:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{jf} \Longrightarrow \\
&\vec{V} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{ji} = \vec{V} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_{jf} \Longrightarrow \\
&2\vec{V} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \vec{v}_{ji} = 2\vec{V} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \vec{v}_{jf}.
\end{aligned} \tag{5-17}$$

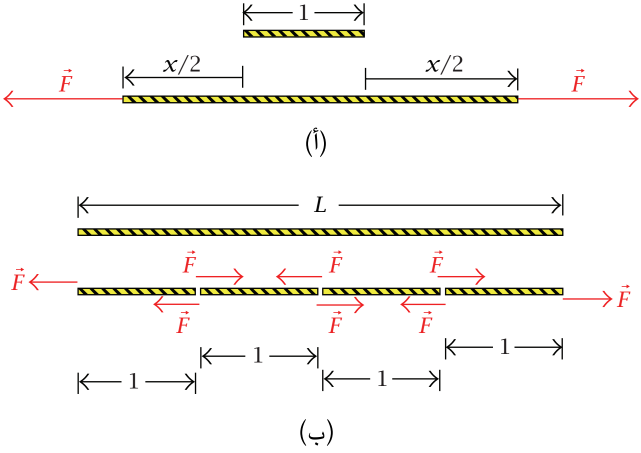
ومن ثَمَّ يمكننا إعادة كتابة طاقة الحركة الابتدائية للإطار القصوري الجديد على الصورة:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j {v'_{ji}}^2 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left[v_{jf}^2 - 2\vec{V} \cdot \vec{v}_{jf} + V^2 \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left(\vec{v}_{jf} - \vec{V} \right)^2 \\
\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j {v'_{ji}}^2 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j {v'_{jf}}^2.
\end{aligned} \tag{5-18}$$

إذنْ طاقةُ الحركة محفوظةٌ في هذا الإطار.

(٥-٦) تصادُم جسيمين يُنتِج متجهين خارجين لكمية التحرك، هذان المتجهان يُعرِّفان مستوى ما؛ ومن ثَمَّ يكون لدينا مسألة في بُعْدَين. يتطلب حفظ كمية التحرك لجسيمين متماثلَي الكتلة أحدهما ساكن أن يكون:

$$\begin{aligned}
&m\vec{v}_{1i} = m\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f} \Longrightarrow \\
&\vec{v}_{1i}^2 = \vec{v}_{1f}^2 + \vec{v}_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f},
\end{aligned} \tag{5-19}$$



شكل ٥-١: القوى المؤثرة على قطعة حبل مشدود.

ولكن حفظ طاقة الحركة يتطلب أن يكون:

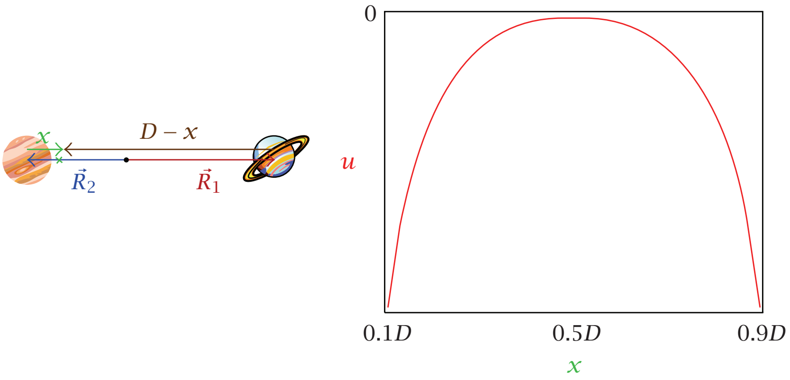
$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \Rightarrow v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \tag{5-20}$$

ولجعل معادلتَيْ كلٍّ من حفظ كمية التحرك وطاقة الحركة صحيحتين، يتطلب ذلك:

$$2\vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0, \tag{5-21}$$

مما يتطلَّب بدوره أن يكون متجهَا كمية التحرك متعامدين، بمعنى أن الجسيمين يتحركان كلٌّ منهما عموديٌّ على الآخَر.

(٥-٧) يؤثِّر التصادم بقوة دفعية على المنصة، والتي تدفعُ القالبَ بسرعةٍ، نتيجةً للقصور الذاتي، ليصل إلى نفس سرعة المنصة قبل أن يتمكَّن الزنبرك من التأثير بقوةٍ أكبر بأيِّ قدرٍ من القوة التي يؤثِّر بها في حالة الاتزان في وجود المنصة وحدها. نقيس أقصى انضغاط للزنبرك من وضع اتزان المنصة والزنبرك قبل التصادُم. يأتي



شكل ٥-٢: جهد الجاذبية التثاقلية للمسألة (٥-٨).

مقدار سرعة القالب قبل التصادم مباشَرةً من حفظ الطاقة الميكانيكية، وبذلك إذا كان $m = 0.500\,\text{kg}$ و $y_0 = 0.600\,\text{m}$ فإن:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy_0 \implies$$

$$v = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2\,(9.80\,\text{m/s}^2)\,(0.600\,\text{m})} \qquad (5\text{–}22)$$

$$= 3.43\,\text{m/s}.$$

نستخدم حفظ كمية التحرك لإيجاد مقدار سرعة المنصة والقالب مباشَرةً بعد التصادم. ليكن M كتلة المنصة، و v مقدار سرعة القالب الابتدائية قبل التصادُم مباشَرةً، و V مقدار سرعة كلٍّ من القالب والمنصة بعد التصادم مباشرةً؛ إذنْ فإن:

$$mv = (m + M)\,V \implies$$

$$V = \frac{mv}{m + M} = \frac{(0.500\,\text{kg})\,(3.43\,\text{m/s})}{1.50\,\text{kg}} \qquad (5\text{–}23)$$

$$= 1.14\,\text{m/s}.$$

يمكننا بعد التصادُم استخدام حفظ الطاقة. ليكن y المسافة التي ينضغطها الزنبرك من موضع الاتزان (وهو وضع الاتزان الذي تكون عنده المنصة فوق الزنبرك ساكنةً قبل التصادم مع القالب). يكون الزنبرك منضغطًا بالفعل مسافة Mg/k، وذلك قبل أن يصدم القالبُ المنصةَ؛ إذنْ فإن:

$$K_f + U_f = K_0 + U_0$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k} + y\right)^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + (m+M)gy + \frac{1}{2}\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$0 = ky^2 - 2gmy - (m+M)V^2 \Longrightarrow$$

$$y = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + kV^2(m+M)}}{k} \tag{5-24}$$

$$= \frac{(4.90\,\mathrm{N}) + \sqrt{(4.90\,\mathrm{N})^2 + (120\,\mathrm{N/m})(1.14\,\mathrm{m/s})^2(1.50\,\mathrm{kg})}}{120\,\mathrm{N/m}}$$

$$y = 0.175\,\mathrm{m} = 17.5\,\mathrm{cm}.$$

(٥-٨) (أ) الشكل الكيفي مبيَّن أدناه؛ حيث x تعبِّر عن البُعْد عن أحد الكوكبين على طول الخط بينهما. لنا مطلق الحرية لوضع نقطة الأصل في أي مكان نرغبه. من ضمن الاختيارات السهلة أن تكون على الخط الواصل بين الكوكبين. بالنسبة إلى الشكل أدناه يتضح أن:

$$\left|\vec{R}_1 - \vec{r}\right| = D - x, \qquad \left|\vec{R}_2 - \vec{r}\right| = x, \tag{5-25}$$

حيث x مسافة موجبة. دالة طاقة الجهد هي:

$$u(x) = -GM\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}\right]$$

$$= -GM\left[\frac{D}{x(D-x)}\right] \tag{5-26}$$

$$u(x) = -\frac{GM}{D(x/D)(1-x/D)}.$$

نرسم $u(x)$ بوحدات اختيارية للطاقة.

(ب) هذه المسألة ليست فيزيائية بعض الشيء؛ لأنه لا يمكن أن تستقر المحطات بثباتٍ في مواضعها بالنسبة إلى الكواكب. ومع ذلك نأخذ المواضع ونلاحظ أنه ينبغي على الطاقة الميكانيكية الكلية الابتدائية للمقذوف أن تتخطى طاقة الجهد العظمى عند $D/2$ لكي يتمكن من الوصول إلى المحطة الأخرى. نعلم موضع القيمة العظمى لأن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x/D)\,(1-x/D)}\right]=0 \Rightarrow x=\frac{D}{2} \tag{5-27}$$

ويمكنك بسهولة إثبات أن القيمة القصوى هي قيمة عظمى. إذا كانت طاقة الحركة على طول الخط الواصل بين الكوكبين لا تساوي صفرًا عند $D/2$، فإن المقذوف يسقط في اتجاه المحطة الأخرى.

$$\begin{aligned}
u_{\text{Alpha}} &= -GmM\left[\frac{1}{D/4}+\frac{1}{3D/4}\right]=-\frac{16GmM}{3D} \Rightarrow \\
K_0+u_{\text{Alpha}} &= 0+u\,(x=D/2) \\
\frac{1}{2}mv^2-\frac{16GMm}{3D} &= -\frac{4GMm}{D} \Rightarrow \\
v_0 &= \sqrt{\frac{8GM}{3D}}.
\end{aligned} \tag{5-28}$$

الفصل السادس

الحركة التوافقية البسيطة

(١) حلول مسائل الحركة التوافقية البسيطة

(٦-١) لقد بيَّنَّا أن معادلة الحركة هي نفسها كما في إطارٍ تمَّ تعديلُ عجلةِ الجاذبية فيه إلى $\vec{g}'$؛ حيث $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$؛ إذنْ لابد أن يكون الزمن الدوري للبندول:

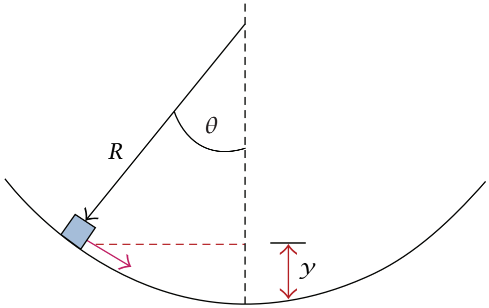
$$\text{period} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2 + a^2}}}. \qquad (6\text{–}1)$$

(٦-٢) حركة الجسيم مماثلة لحركة كرة بندول بسيط. استُبدِل بالشد في هذه الحالة القوة العمودية للسطح الكروي على الجسيم. يمكننا استخدام القوى المؤثرة على الجسيم لاستنتاج معادلة الحركة. دعنا بدلًا من ذلك نتبع المقارنة الواردة في الفصل السادس القسم (٤) وننظر إلى الطاقة الميكانيكية. نرى من شكل ٦-١ أن ارتفاع الجسيم فوق أدنى نقطة للسطح الكروي هو:

$$y = R - R\cos\theta = R\left(1 - \cos\theta\right). \qquad (6\text{–}2)$$

لا يوجد احتكاك، وبالتالي فإن جميع القوى محافظة؛ ومن ثَمَّ يمكننا كتابة:

$$\text{KE} + \text{PE} = E \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mgy = \text{constant}, \qquad (6\text{–}3)$$



شكل ٦-١: الحل (٦-٢).

حيث m كتلة الجسيم. نلاحظ أن مقدار السرعة الزاويَّة للجسيم عند أي لحظة هو $\omega = v/R$. نأخذ مشتقة معادلة الطاقة بالنسبة إلى الزمن للحصول على:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E = 0 &= \frac{1}{2}m\left(2v\frac{dv}{dt}\right) + mgR\left(0 - \sin\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}\right) \\ &= mR\omega \cdot \frac{d}{dt}(R\omega) + mgR\sin\theta \cdot \omega \\ 0 &= mR^2\omega\alpha + m\omega gR\sin\theta \Longrightarrow \\ \alpha &= -\frac{g}{R}\sin\theta, \end{aligned} \tag{6-4}$$

حيث α بالطبع العجلة الزاويَّة. لإزاحات صغيرة من أدنى نقطةٍ نحتاج أن يكون $\theta \sim 0$؛ ومن ثَمَّ فإن $\sin\theta \sim \theta$؛ إذنْ فإن:

$$\alpha \simeq -\frac{g}{R}\theta. \tag{6-5}$$

والذي يكون له نفس صورة (6-3) إذا استبدلنا ω^2 بـ (g/R)؛ ومن ثَمَّ نرى على الفور أن معادلة الحركة تتنبَّأ بتذبذبٍ توافُقيٍّ بسيط زمنه الدوري:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{6-6}$$

(٦-٣) يمكن تحديد موضع الجسيم على أنه x كما هو مبيَّن في الشكل ٦-١٠، ويكون هذا الموضع هو:

$$x = r\sin\theta. \tag{6-7}$$

مقدار القوة على الجسيم عند هذا الموضع هو:

$$F = \frac{GmM(r)}{r^2} = \frac{mgr}{R}, \tag{6-8}$$

حيث $M(r) = Mr^3/R^3$؛ لأن كثافة الكتلة منتظمةٌ (ومن ثَمَّ تساوي $M/[(4/3)\pi R^3]$) و$g = GM/R^2$. مركبة المتجه $\vec{F}$ في اتجاه عمودي على النفق تكون متزنة مع القوى العمودية التي تُبقِي الجسيم داخل النفق. المركبة الموازية لسطح النفق هي:

$$F_x = -\frac{mgr}{R}\cdot\sin\theta, \tag{6-9}$$

حيث توضِّح الإشارةُ السالبة أن اتجاه القوة يكون دائمًا نحو مركز النفق. عند هذه النقطة يكون $\theta = 0$، وتكون القوة المتجهة في الاتجاه الموازي صفرًا؛ ومن ثم فإن هذه النقطة تُمثل موضع اتزان. تكون المعادلة التي تصف حركة الجسيم إذنْ:

$$\begin{gathered} ma_x = F_x = -\frac{mgr}{R}\sin\theta = -\frac{mgx}{R} \Longrightarrow \\ a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{R}x. \end{gathered} \tag{6-10}$$

وهو نفس صورة (3-6)، وبالتالي نحدِّد هذه الحركة بأنها تذبذُبٌ توافقيٌّ بسيط على طول النفق، وتردده الزاوي هو:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{6-11}$$

زمن العبور من إحدى نهايتَيِ النفق إلى الأخرى هو نصف الزمن الدوري للذبذبة:

$$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$= (3.14159)\sqrt{\frac{6.37 \times 10^6\,\text{m}}{9.81\,\text{m/s}^2}} \qquad (6\text{–}12)$$

$$t = 2530\,\text{s} = 42.2 \text{ minutes.}$$

لاحظ أن النتيجة لا تعتمد على كتلة الجسيم أو طول النفق! ومن الملاحظات المثيرة للانتباه أيضًا أن الزمن الدوري مساوٍ للزمن الدوري لقمرٍ صناعيٍّ يحلِّق فوق أسطح منازل الأرض في مدارٍ دائري.

(٦–٤) بالنسبة إلى القالب العلوي، فإن القوة العمودية نتيجة القالب السفلي هي mg. القيمة العظمى للقوة الأفقية التي يمكنها أن تؤثِّر على القالب العلوي تُعطَى بالقيمة العظمى μmg لقوة الاحتكاك الاستاتيكي، وبالتالي فإن أقصى عجلة ممكنة للقالب العلوي قبل حدوث الانزلاق هي μg، وللحصول على القيمة العظمى للعجلة بالنسبة إلى السعة المعطاة نعود إلى (6–13). في هذه الحالة تكون لنا حرية ضبط نقطة المرجع $x_0 = 0$. يُعطَى التردد الزاوي من:

$$\omega^2 = \frac{k}{m+M}. \qquad (6\text{–}13)$$

ومن معادلة الحركة (6–13) نرى أن أقصى مقدار للعجلة يحدث عند موضعي السعة (أقصى مقدار لـ x)؛ إذنْ فإن:

$$a_{\max} = -\omega^2 \cdot x_{\max} = -\omega^2 \cdot A$$

$$\mu_{\min}\, g = \frac{kA}{m+M} \Longrightarrow \qquad (6\text{–}14)$$

$$\mu_{\min} = 0.136.$$

الفصل السابع

الاتزان الاستاتيكي لأجسام جاسئة بسيطة

(١) حلول مسائل الاتزان الاستاتيكي

(٧-١) إذا أخذنا السلم بأكمله كنظامٍ، فإن القوى الخارجية الوحيدة هي القوى الرأسية من الأرضية (التي لا يمكنها التأثير بقوى أفقية؛ حيث إنه لا يوجد احتكاك) والأوزان؛ ومن ثَمَّ فإن:

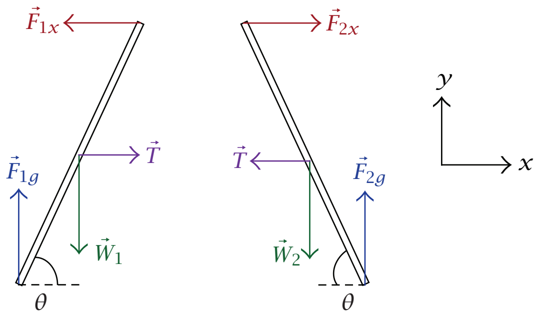
$$F_{1g} + F_{2g} - W_1 - W_2 = 0 \Longrightarrow F_{1g} + F_{2g} = W_1 + W_2. \qquad (7\text{–}1)$$

بالنسبة إلى القضيبين ١ و٢ نجد في الاتجاه الأفقي أن:

$$\begin{aligned} 1:&\quad T - F_{1x} = 0 \Longrightarrow T = F_{1x} \\ 2:&\quad F_{2x} - T = 0 \Longrightarrow T = F_{2x} = F_{1x}. \end{aligned} \qquad (7\text{–}2)$$

نستطيع أيضًا الحصول على هذا من قانون نيوتن الثالث بتطبيقه على المفصل. بحساب العزم حول مركز كتلة القضيب ١، بفرض أن طولي القضيبين ℓ، نحصل على:

$$\begin{aligned} 1:&\quad F_{1x}\frac{\ell}{2}\sin\theta - F_{1g}\frac{\ell}{2}\cos\theta = 0 \\ 2:&\quad F_{2x}\frac{\ell}{2}\sin\theta - F_{2g}\frac{\ell}{2}\cos\theta = 0. \end{aligned} \qquad (7\text{–}3)$$



شكل ٧-١: مخطط القوة على قضيبَيِ السلم في المسألة (٧-١).

بجمع هاتين المعادلتين ينتج أن:

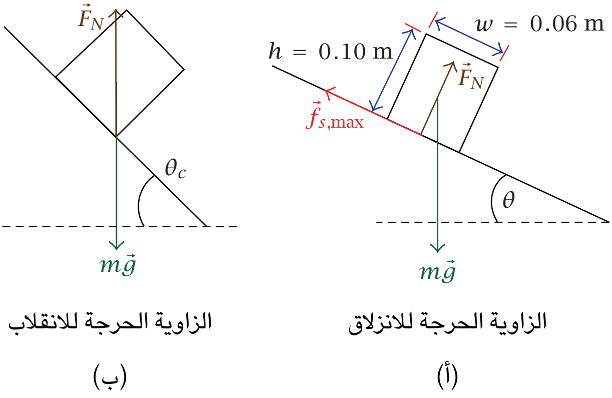
$$\frac{1}{2}(F_{1x}+F_{2x})\sin\theta = \frac{1}{2}\left(F_{1g}+F_{2g}\right)\cos\theta \Longrightarrow$$

$$2T\sin\theta = (W_1+W_2)\cos\theta \Longrightarrow \tag{7-4}$$

$$T = \frac{W_1+W_2}{2}\cot\,\theta.$$

(٧-٢) الحالة المبيَّنَة في الشكل ٧-٢ تصوِّر القالب عند زاويةٍ تجعل القيمة العظمى لقوة الاحتكاك الاستاتيكي كافيةً بالكاد لمنع الانزلاق، وعند الزاوية التي تجعل القالب بالكاد في حالة اتزان غير مستقر، بحيث يكون على وشك أن ينقلب. تطلب المسألةُ تحديدَ الشرط الذي به تكون هاتان الزاويتان متماثلتين، بمعنى أن قيمة $\mu = \mu_c$ هي التي تحدِّد أن تكون زاوية تحقُّق هذين الشرطين (الانقلاب والانزلاق) واحدة. شرط الانقلاب مباشر؛ حيث لا يكون بالإمكان الحفاظ على الاتزان إذا كان مركز ثقل الصندوق غير مدعوم بقاعدته. يحدث الاتزانُ غير المستقر إذنْ للزاويةِ التي عندها يكون الركن السفلي الأيمن تحت مركز الثقل مباشَرةً؛ ومن ثَمَّ فإن:

$$\tan\theta_c = \frac{w/2}{h/2} = \frac{w}{h}; \tag{7-5}$$



شكل ٧-٢: قالب على لوح مائل عند زاوية حرجة للانزلاق أو الانقلاب في المسألة (٧-٢).

حيث w عرض الصندوق، وh ارتفاعه، وθ_c الزاوية الحرجة التي يحدث عندها الانقلاب. زاوية الانزلاق الحرجة تتعين عن طريق القيمة العظمى لقوة الاحتكاك الاستاتيكي ومركبة قوة الجاذبية المتجهة لأسفل المنحدر. القيمة العظمى للاحتكاك الاستاتيكي تتحدد من القوة العمودية F_N.

$$F_N = mg\cos\theta \Longrightarrow f_{s,\max} = \mu F_N = \mu mg\cos\theta$$

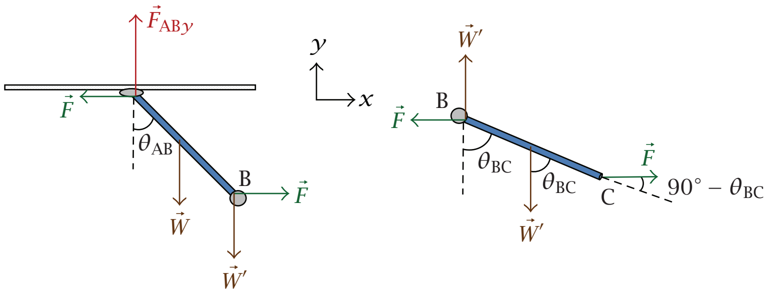
$$\text{critical angle: } \mu mg\cos\theta_c = mg\sin\theta_c \Longrightarrow \tag{7-6}$$

$$\tan\theta_c = \mu.$$

لكي تكون زاويتا الانقلاب والانزلاق واحدة، نحتاج إلى أن يكون:

$$\mu_c = \tan\theta_c = \frac{w}{h} = 0.600. \tag{7-7}$$

إذنْ الشرط العام هو: إذا كان معامل الاحتكاك الاستاتيكي أكبر من θ_c لحالة الانقلاب، فإن زيادة θ سوف تؤدي إلى حدوث الانقلاب، وإلا يبدأ الصندوق في الانزلاق قبل حدوث الانقلاب. بمعنى أنه إذا كان $\mu > w/h$ ينقلب، وإذا كان $\mu < w/h$ ينزلق.



شكل ٧-٣: قضيبان معلقان من مسقط في المسألة (٧-٣).

(٧-٣) بالنسبة إلى القضيب BC، يكون العزم حول محورٍ يمر بالنقطة B هو:

$$\tau_B = 0 = FL'\cos\theta_{BC} - W'\frac{L'}{2}\sin\theta_{BC} \Longrightarrow$$

$$\tan\theta_{BC} = \frac{2F}{W'} \Longrightarrow \tag{7-8}$$

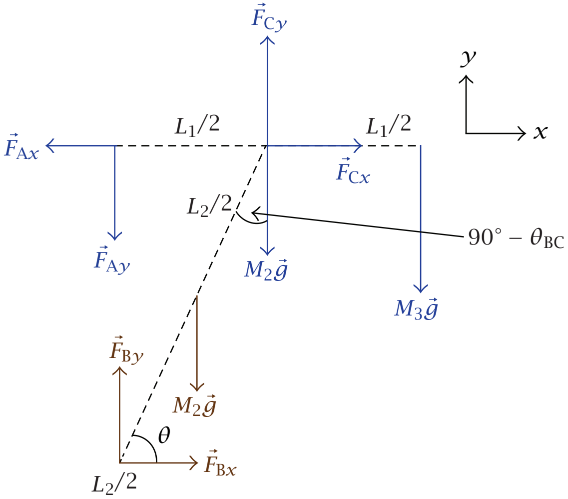
$$\theta_{BC} = \tan^{-1}\frac{2F}{W'}.$$

بالنسبة إلى القضيب AB، يكون العزم حول المفصل عند السقف هو:

$$0 = FL\cos\theta_{AB} - W'L\sin\theta_{AB} - W\frac{L}{2}\sin\theta_{AB} \Longrightarrow$$
$$\theta_{AB} = \tan^{-1}\frac{2F}{W+2W'}. \tag{7-9}$$

(٧-٤) مخطط القوة مبيَّن في الشكل ٧-٤. باختيار محور الدوران بحيث يمر بالنقطة C، يمكننا سريعًا تعيينُ القوة الرأسية المؤثِّرة على القضيب رقم ١ عند النقطة A؛ حيث إن كلًّا من المفصل عند C ووزن M_1 ليس لديهما ذراعُ رفعٍ عند C. لا بد أن يكون الشد في الحبل المربوط عند نهاية الطرف الأيمن للقضيب رقم ١ مساويًا للوزن M_3g؛ لأن تلك الكتلة في حالة اتزان.

$$F_{Ay}\frac{L_1}{2} - M_3g = 0 \Longrightarrow F_{Ay} = M_3g. \tag{7-10}$$



شكل ٧-٤: مخطط قوة للمسألة (٧-٤).

والآن نستخدم النقطة A كمحور وننظر إلى معادلة العزم للقضيب رقم ١؛ حيث F_{Cx} و F_{Cy} مركبتا القوة المؤثرة على القضيب رقم ١ عند النقطة C.

$$0 = F_{Cy}\frac{L_1}{2} - M_1 g\frac{L_1}{2} - M_3 g L_1 \Longrightarrow$$
$$F_{Cy} = (2M_3 + M_1)\, g. \tag{7-11}$$

كان في استطاعتنا أيضًا الحصول على ذلك من معادلة اتزان القوة الرأسية للقضيب رقم ١. F_{Cy} ليست من مركبات القوة التي أردناها، ولكن جميع نقط المحور الأخرى تساهم بمركبتي قوة مجهولتين. بالنظر إلى معادلة القوة في y للقضيب رقم ٢، وبملاحظة أنه، باستخدام قانون نيوتن الثاني، تكون $\vec{F}_{Cy}$ هنا عكس اتجاه $\vec{F}_{Cy}$ على القضيب رقم ١، فإن:

$$-F_{Cy} - M_2 g + F_{By} = 0 \Longrightarrow F_{By} = F_{Cy} + M_2 g = (2M_3 + M_1 + M_2)\, g. \tag{7-12}$$

والآن فإن حساب العزم للقضيب رقم ٢ حول النقطة C يعطي:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{Bx} L_2 \sin\theta + M_2 g \frac{L_2}{2} \cos\theta - F_{By} L_2 \cos\theta \Longrightarrow \\ F_{Bx} &= \left(F_{By} - \frac{1}{2} M_2 g\right) \cot\theta = \left(2M_3 + M_1 + \frac{1}{2} M_2\right) g \cot\theta. \end{aligned} \tag{7-13}$$

نرى الآن أن مركبتي القوة الأفقية الوحيدة المؤثِّرة على القضيب رقم ٢ هما F_{Bx} وF_{Cx}؛ إذنْ لا بد أنهما متساويتان في المقدار (تذكَّرْ أن $\vec{F}_{Cx}$ تشير إلى شمال القضيب رقم ٢). وهذا أيضًا صحيح لـ $\vec{F}_{Ax}$ و$\vec{F}_{Cx}$، فلا بد أنهما أيضًا متساويتان في المقدار؛ إذنْ فإن:

$$F_{Ax} = F_{Cx} = F_{Bx} = \left(2M_3 + M_1 + \frac{1}{2} M_2\right) g \cot\theta. \tag{7-14}$$

إذا ما اتَّبعنا مبدأ تقليص الحسابات، فإن أقصر طريق للإجابة هو معاملة رقم ١ ورقم ٢ وM_3 كجسم جاسئ واحد. يكون إذنْ العزم حول النقطة A:

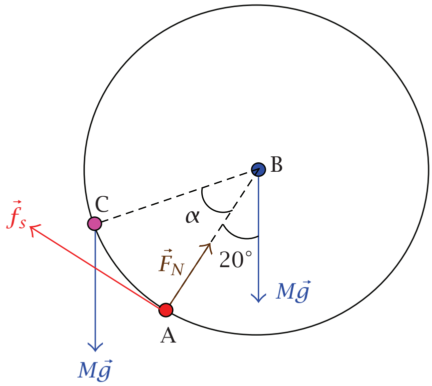
$$\begin{aligned} 0 &= M_1 g \frac{L_1}{2} + M_3 g L_1 + M_2 g \frac{L_1}{4} - F_{Bx} \frac{L_1}{2} \tan\theta \Longrightarrow \\ F_{Bx} &= \left(M_1 + 2M_3 + \frac{1}{2} M_2\right) g \cot\theta. \end{aligned} \tag{7-15}$$

بالنسبة إلى هذا النظام، لا توجد قوًى خارجية مؤثِّرة عند C؛ ومن ثَمَّ تكون القوتان الأفقيتان الوحيدتان مؤثرتين عند A وB، وينتج أن:

$$F_{Ax} = F_{Bx}. \tag{7-16}$$

يمكننا الآن اعتبار القضيب رقم ١ وحده؛ حيث إن:

$$F_{Cx} = F_{Ax}. \tag{7-17}$$



شكل ٧-٥: مخطط الجسيم الحر للمسألة (٧-٥).

كما سبق، يؤدي حساب العزم حول C للقضيب رقم ١ إلى $F_{\mathrm{A}y} = M_3 g$، بينما يعطي العزم له حول A:

$$F_{\mathrm{C}y} = (2M_3 + M_1)\, g \qquad (7\text{–}18)$$

وتُعطي معادلة القوة للقضيب رقم ١:

$$F_{\mathrm{B}y} = F_{\mathrm{C}y} + M_2 g = (2M_3 + M_1 + M_2)\, g. \qquad (7\text{–}19)$$

(٧-٥) في النص، تمَّ إثبات أن نتيجة محصلة جمع العزم التثاقلي على كلِّ قطعة من الطوق هي أن القوة تؤثِّر كما لو كانت تؤثِّر على مركز الكتلة، وهو مركز الشكل الهندسي للطوق. يمكننا ملاحظة أن محصلة القوة على الطوق في الاتجاه الموازي للمنحدر لا بد أن تكون كالآتي:

$$Mg\sin 20^\circ + Mg\sin 20^\circ - f_s = 0 \Longrightarrow f_s = 2Mg\sin 20^\circ \qquad (7\text{–}20)$$

وذلك لأن محصلة القوة على الطوق لا بد أن تكون صفرًا. إذا نظرنا إلى العزم حول محورٍ خلال مركز كتلة الطوق، نرى أن وزن الطوق ليس لديه ذراع رفع، وتشير القوة العمودية على طول المتجه المركزي في اتجاه النقطة A حيث تؤثِّر القوة العمودية، وبالتالي

فلا بد أن العزمَ نتيجة الكتلة النقطية والعزمَ نتيجة قوة الاحتكاك الاستاتيكي يلاشيان أحدهما الآخر حول هذا المحور. نسمي نصف قطر الطوق R؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} MgR\sin(\alpha+20^\circ) - f_s R = 0 \Longrightarrow \\ MgR\sin(20^\circ+\alpha) = 2MgR\sin 20^\circ \Longrightarrow \\ (20^\circ+\alpha) = \sin^{-1}[2\sin 20^\circ] \Longrightarrow \\ \alpha = 23.2^\circ. \end{aligned} \tag{7-21}$$

الفصل الثامن

الحركة الدورانية، وكمية التحرك الزاويِّ، وديناميكا الأجسام الجاسئة

(١) حلول مسائل الحركة الدورانية

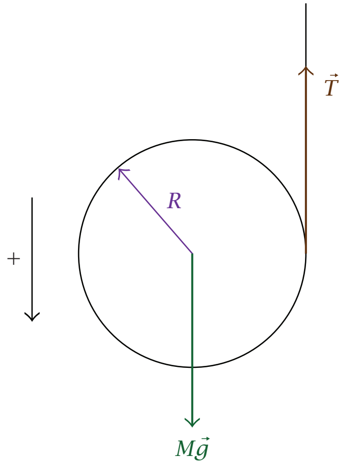
(٨-١) (أ) القوى المؤثِّرة مبيَّنة في الشكل ٨-١. العزم حول محور خلال مركز الكتلة هو:

$$\tau = TR = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a_{\text{CM}}}{R} \Longrightarrow$$
$$T = \frac{1}{2}Ma_{\text{CM}}, \tag{8-1}$$

حيث T الشد في الحبل، وقد استخدمنا شرط التدحرج بدون انزلاق، بحيث إن العجلة الزاوية تساوي العجلة الخطية لمركز الكتلة مقسومة على نصف قطر الأسطوانة. يمكننا الآن النظر لمعادلة القوة لمركز الكتلة:

$$Mg - T = Ma_{\text{CM}}$$
$$Mg - \frac{1}{2}Ma_{\text{CM}} = Ma_{\text{CM}} \Longrightarrow \tag{8-2}$$
$$a_{\text{CM}} = \frac{2}{3}g.$$

(ب) مخطط القوة لم يتغيَّر، ولكن عجلة مركز كتلة الأسطوانة الآن صفر بالنسبة إلى مراقب ثابت، وبالتالي فإن الشد لا بد أن يساوي الوزن، بمعنى أن $T = Mg$؛ إذنْ



شكل ٨-١: القوتان المؤثرتان على أسطوانة هابطة ملفوفة بخيط في المسألة (٨-١).

يكون العزم حول محور خلال مركز الكتلة هو:

$$TR = I\alpha$$

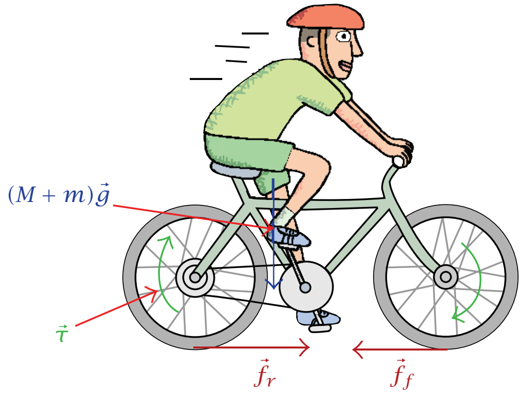
$$MgR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Longrightarrow \tag{8-3}$$

$$\alpha = \frac{2g}{R}.$$

من المفترض أن يكون شرط التدحرج بدون انزلاق لا يزال مطبقًا، بمعنى أن الأسطوانة لا تنزلق على الحبل؛ إذنْ لا بد أن تتسارع اليد لأعلى بالقيمة:

$$a_{\text{hand}} = R\alpha = 2g. \tag{8-4}$$

(٨-٢) العزم المؤثِّر بواسطة سلسلة الدراجة يُعتبَر معلومًا. لسنا في حاجةٍ لمعرفةِ نصف القطر الذي يؤثِّر عنده. بما أن السرعة الزاوية لكلٍّ من العجلتين تتزايد، والعزم الوحيد على العجلة الأمامية (حول مركزها) ناتج عن قوة الاحتكاك الاستاتيكي، فلا بد أن تكون تلك القوة متجهة للخلف. وبما أن محصلة القوة على الدراجة وراكبها لا



شكل ٨-٢: مخطط القوة والعزم للمسألة (٨-٢).

بد أن تكون في الاتجاه الأمامي، فإن قوة الاحتكاك الاستاتيكي المؤثِّرة بواسطة الأرض على العجلة الخلفية لا بد أن تكون في الاتجاه الأمامي، وبالتالي — بالنسبة إلى العجلة الخلفية — يكون:

$$\tau - f_r R = I\alpha = mR^2 \frac{a}{R}, \qquad (8\text{–}5)$$

بينما للعجلة الأمامية يكون لدينا:

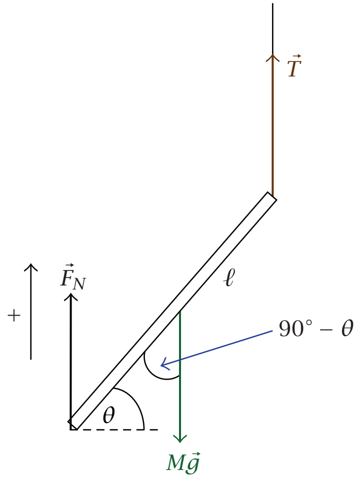
$$f_f R = I\alpha = mR^2 \frac{a}{R}. \qquad (8\text{–}6)$$

قوى الاحتكاك الاستاتيكي هي القوى الخارجية المؤثرة بواسطة الأرض على نظام الدراجة والراكب؛ إذنْ فإن:

$$f_r - f_f = (M + 2m)\, a$$

$$\left[\frac{\tau}{R} - ma\right] - ma = (M + 2m)\, a \Longrightarrow \qquad (8\text{–}7)$$

$$a = \frac{\tau}{(M + 4m)\, R}$$



شكل ٨-٣: القوة المؤثرة على قضيب معلَّق من السقف ومُلامِس للأرضية في المسألة (٨-٣).

(٨-٣) (أ) محصلة العزم حول نهاية القضيب المربوط بخيط تكون صفرًا؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{net}} &= 0 = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - F_N\ell\cos\theta \Longrightarrow \\ F_N &= \frac{1}{2}mg\cos\theta, \end{aligned} \tag{8-8}$$

حيث نلاحظ أن القوة المؤثرة بواسطة الأرضية تكون فقط على طول الاتجاه الرأسي؛ لأن الأرضية الملساء لا يمكنها التأثير بأي مركبة أفقية للقوة على القضيب.

(ب) مازال عند قطع الخيط لا يوجد مركبات أفقية لأيٍّ من قوة التلامس من الأرضية أو قوة الجاذبية؛ إذنْ تظل المركبة x لموضع مركز الكتلة ثابتةً، وهذا يعني أن نقطة التلامس مع الأرضية مُعرَّضة لعجلة نحو اليسار. لا يمكننا استخدام هذه النقطة لحسابات العزم، أما بالنسبة إلى محورٍ يمرُّ خلال مركز الكتلة، فيمكننا حساب العزم.

$$\tau_{\text{CM}} = -F_N\frac{\ell}{2}\cos\theta = -I_{\text{CM}}\alpha = -\frac{1}{12}m\ell^2\alpha. \tag{8-9}$$

العجلة الرأسية لمركز الكتلة هي نتيجة القوة العمودية والجاذبية؛ إذنْ فإن:

$$F_N - mg = -ma_{\mathrm{CM}} = -m\left|\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|. \qquad (8\text{–}10)$$

بفرض أن y هي الاتجاه الرأسي (لأعلى) وa_{CM} مقدار عجلة مركز الكتلة. لإيجاد علاقةٍ بين العجلة الزاوية والعجلة الرأسية نلاحظ أن الموضع الرأسي، بحيث تكون الأرضية هي نقطة الأصل، يحدد أن:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\ell}{2}\sin\theta(t) \Rightarrow \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\ell}{2}\cos\theta(t)\,\frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \qquad (8\text{–}11)\\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= \frac{\ell}{2}\left[-\sin\theta(t)\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 + \cos\theta(t)\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right]. \end{aligned}$$

بالنسبة إلى الزمن $t = 0$، تكون السرعتان الابتدائيتان الخطية والزاويَّة لمركز الكتلة قيمتهما صفر؛ إذنْ فإن $d\theta(t)/dt|_{t=0} = 0$؛ ومن ثَمَّ فإن العجلة الرأسية لمركز كتلة القضيب عند $t = 0$ هي:

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -a_{\mathrm{CM}} = -\frac{\alpha\ell}{2}\cos\theta. \qquad (8\text{–}12)$$

يمكننا استخدام معادلتَي القوة والعزم لإيجاد a_{CM}، وهي العجلة الرأسية:

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{m\ell\alpha}{6\cos\theta} \\ &= \frac{m\ell}{6\cos\theta}\cdot\frac{2a_{\mathrm{CM}}}{\ell\cos\theta} \\ m(g - a_{\mathrm{CM}}) &= \frac{m}{3\cos^2\theta}a_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \qquad (8\text{–}13)\\ g &= a_{\mathrm{CM}}\left[\frac{1}{3\cos^2\theta} + 1\right] \Rightarrow \\ a_{\mathrm{CM}} &= \frac{3g\cos^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta} \Rightarrow \vec{a}_{\mathrm{CM}} = -\frac{3g\cos^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta}\hat{y}. \end{aligned}$$

وتكون القوة العمودية:

$$\vec{F}_N = \frac{ma_{\text{CM}}}{3\cos^2\theta}\hat{y} = \frac{mg}{1+3\cos^2\theta}\hat{y}. \tag{8-14}$$

(٨-٤) نعلم أن قوة الاحتكاك الاستاتيكي تؤثِّر على الأسطوانة لأعلى على طول المنحدر. قوة المنحدر العمودية على الأسطوانة هي $mg\cos\theta$؛ حيث m كتلة الأسطوانة. القيمة العظمى لقوة الاحتكاك الاستاتيكي لأي زاوية θ تكون إذنْ:

$$f_{s,\text{max}} = \mu mg\cos\theta, \tag{8-15}$$

والتي تقل بزيادة θ. القيمة العظمى للعزم الذي يمكن أن يؤثِّر حول محور خلال مركز الأسطوانة تقل أيضًا. لا بد أن يُعطِي هذا العزم العجلة الزاوية التي تكافئ شرطَ التدحرج بدون انزلاقٍ للعجلة الخطية لمركز كتلة الأسطوانة. ومن ثَمَّ، إذا كان R نصف قطر الأسطوانة، يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{max}} &= f_{s,\text{max}}R = I\alpha\\ \mu mgR\cos\theta &= \frac{1}{2}mR^2\frac{a_{\text{CM,max}}}{R} \implies \\ a_{\text{CM,max}} &= 2\mu g\cos\theta.\end{aligned} \tag{8-16}$$

ولكن لا بد أن تحقِّق عجلة مركز الكتلة أيضًا قانونَ نيوتن الثالث. على طول اتجاه أسفل المنحدر:

$$\begin{aligned}a_{\text{CM,max}} &= \frac{mg\sin\theta - f_{s,\text{max}}}{m}\\ 2\mu g\cos\theta_{\text{max}} &= g\sin\theta_{\text{max}} - \mu g\cos\theta_{\text{max}} \implies \\ \theta_{\text{max}} &= \tan^{-1}(3\mu).\end{aligned} \tag{8-17}$$

قارن هذه النتيجة بحقيقة أن أقصى انحدار يمكن أن تستقر عليه الكتلة دون أن تنزلق عنده $\theta_{\text{max}} = \tan^{-1}\mu$.

(٨-٥) يتحرك مركز كتلة غطاء الإطار بالأساس مع العجلة بسرعة خطية v_0، وبالتالي تكون السرعة الدورانية بالأساس:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}. \qquad (8\text{–}18)$$

عرَّضَتْ صدمةُ الطريق غطاءَ الإطار لدفعة غيَّرَتِ السرعةَ الخطية لمركز كتلة غطاء الإطار من v_0 إلى v_f، والسرعة الزاوية من v_0/R إلى $\omega_f = v_f/r$. لاحِظْ أنه إذا بطَّأَ (أو سرَّع) اتجاهُ الدفعة السرعةَ الخطية، فلا بد أن يزيد (أو يقلِّل) السرعة الزاوية بعلم اتجاه العزم حول مركز الكتلة:

$$\Delta p = m\left(v_f - v_0\right) \Rightarrow$$

$$\Delta \mathcal{L} = -\Delta p \cdot r$$

$$\frac{1}{2}mr^2\left(\omega_f - \omega_0\right) = -mr\left(v_f - v_0\right) \Rightarrow$$

$$\frac{r}{2}\left(\frac{v_f}{r} - \frac{v_0}{R}\right) = v_0 - v_f \Rightarrow \qquad (8\text{–}19)$$

$$3v_f = v_0\left[2 + \frac{r}{R}\right] \Rightarrow$$

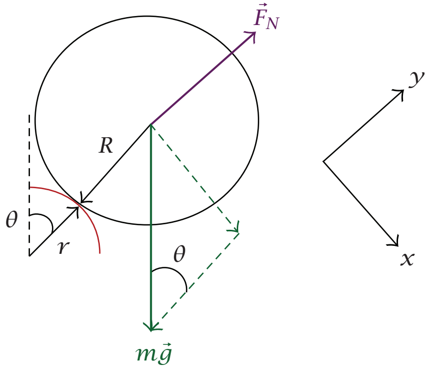
$$v_f = v_0\left[\frac{2}{3} + \frac{r}{3R}\right] \Rightarrow$$

$$\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{v_0}{R}\left[\frac{2}{3}\frac{R}{r} + \frac{1}{3}\right].$$

لاحظ أن $v_f < v_0$ بينما $\omega_f > \omega_0$، علينا أن نتوقَّع أن السرعة الخطية سوف تقل لأن أدنى نقطة لغطاء الإطار لها سرعة في الاتجاه الأمامي $v_0 - \omega_0 r = v_0(1 - r/R) > 0$ قبل أن تصدم الطريق، وبالتالي فإن القوة الاحتكاكية تكون متجهة إلى الوراء. يساهم اتجاه القوة الاحتكاكية هذا أيضًا بعزمٍ حول مركز الكتلة يزيد من السرعة الدورانية.

(٨-٦) (أ) يبيِّن مخطط القوى أعلاه أنه إذا كان $v_0 < v_c$، فإن الشرط الذي يُبقِي الكرة على نصف القطر الصغير r لحرف المكعب المنحني (باللون الأحمر) هو:

$$F_N - mg\cos\theta = -\frac{mv_0^2}{R + r}. \qquad (8\text{–}20)$$



شكل ٨-٤: القوة المؤثرة على كرة جاسئة تتدحرج على حافة مكعب في المسألة (٨-٦).

هذا هو شرط الجذب المركزي اللازم للمسار الدائري. بفرض أن $R \gg r$، فيمكننا إهمال r ونفترض فقط أن نصف القطر للمسار المنحني ما هو إلا R نصف قطر الكرة. تعريف «الحفاظ على التلامس» هو ألَّا تكون القوة العمودية صفرًا؛ ومن ثَمَّ إذا كانت السرعة الابتدائية لمركز كتلة الكرة مرتفعة للغاية، فإن F_N لا بد أن تكون أقل من صفر (أمر غير فيزيائي!) لتحقِّق المعادلة، وبالتالي تترك الكرة المكعب دون أي انحرافٍ في اتجاه $\vec{v}_0$؛ ولهذا نريد تعيين قيمة v_c عند $\theta = 0$.

$$mg\cos\theta - \frac{mv_c^2}{R} = 0 \Longrightarrow v_c = \sqrt{Rg\cos\theta} = \sqrt{Rg}. \qquad (8\text{–}21)$$

(ب) نسمح الآن أن تكون $\theta > 0$. تزداد كلٌّ من السرعة الخطية لمركز الكتلة والسرعة الزاوية حول مركز الكتلة كلما انخفض مركز الكرة وهي تتدحرج على الحافة. يمكن حساب طاقة الحركة الابتدائية على النحو التالي:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\mathrm{CM}}^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{v_0^2}{R^2} \qquad (8\text{–}22) \\ K_0 &= \frac{7}{10}mv_0^2. \end{aligned}$$

من الأسهل اعتبار أن الحركة دورانية صرف حول نقطة التلامس الثابتة (بفرض عدم وجود انزلاق!) بين الكرة وحرف المكعب؛ إذنْ، باستخدام نظرية المحور المتوازي وشرط التدحرج بدون انزلاقٍ، الذي يقتضي أن مقدار السرعة الزاوية حول مركز الكتلة متماثِل مع مقدار السرعة الزاوية لمركز الكتلة حول المحور الذي يمر خلال نقطة التلامس للتدحرج، يكون لدينا:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2} I_{\text{edge}} \omega_{\text{edge}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\frac{v_0^2}{R^2} \qquad (8\text{–}23) \\ K_0 &= \frac{7}{10}mv_0^2. \end{aligned}$$

يزيد مقدار السرعة مع تدحرج الكرة على الحافة بانخفاض مركز الكتلة. باعتبار السطح العلوي للمكعب أنه النقطة الصفرية للموضع الرأسي، نحسب هذه الزيادة في مقدار السرعة كما يلي:

$$\begin{aligned} -\Delta U = mgR - mgR\cos\theta = \Delta K = \frac{7}{10}mv_f^2 - \frac{7}{10}mv_0^2 &\implies \\ gR\,(1-\cos\theta) = \frac{7}{10}v_f^2 - \frac{7}{10}v_0^2. & \qquad (8\text{–}24) \end{aligned}$$

من تحليلنا في الجزء (أ) من هذه المسألة، نعلم أن هناك قيمة عظمى لمقدار السرعة مناظِرة لحالة الحفاظ على التلامس، وهي الحالة التي تصل عندها القوة العمودية إلى صفر.

$$\begin{aligned} F_N - mg\cos\theta &= -\frac{mv^2}{R} \implies \\ 0 - mg\cos\theta_c &= -\frac{mv_f^2}{R} \implies \qquad (8\text{–}25) \\ v_f^2 &= gR\cos\theta. \end{aligned}$$

بالتعويض بهذا في معادلتنا السابقة للطاقة، نرى أن:

$$gR\,(1-\cos\theta_c) = \frac{7}{10}gR\cos\theta_c - \frac{7}{10}v_0^2 \Rightarrow$$

$$\frac{17}{10}gR\cos\theta_c = gR + \frac{7}{10}v_0^2 \Rightarrow \tag{8–26}$$

$$\theta_c = \cos^{-1}\left[\frac{7}{17}\frac{v_0^2}{gR} + \frac{10}{17}\right].$$

(ج) كما سبق، تصل القوة العمودية إلى صفر عند الزاوية الحرجة θ_c، فإذا كان $v_0 = 0$، فإن المعادلة من الجزء (ب) تعطينا:

$$\theta_c = \cos^{-1}\frac{10}{17} = 54.0°. \tag{8–27}$$

(د) تدبَّرْ شكل ٨-٥ حيث نوضِّح الكرة وهي على وشك أن تترك حرف المكعب. نعلم الزاوية الحرجة θ_c لحدوث ذلك إذا كان $v_0 = 0$. من الشكل نرى أنه، في الزمن الذي يستغرقه مركز كتلة الكرة للتحرك أفقيًّا لمسافة Δx، إذا كانت الكرة قد تحرَّكَتْ رأسيًّا لأسفل أقل من مسافة $\Delta y = R\cos\theta$، فإن الحافة اليُسرَى للكرة تفوِّت آخِر نقطة تلامس بين الكرة والمكعب، وبالتالي لا ترتطم بالحرف. معادلات السقوط الحر لمركز الكتلة هي:

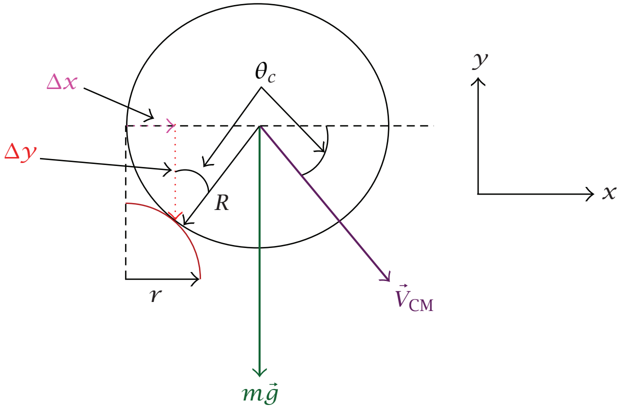
$$\begin{aligned}\Delta x &= v_{\rm CM}\cos\theta_c\,(\Delta t)\\ \Delta y &= v_{\rm CM}\sin\theta_c\,(\Delta t) + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2.\end{aligned} \tag{8–28}$$

يمكن حلُّ أول معادلة في Δt؛ ومن ثَمَّ نستطيع التعويض بها في معادلة Δy.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{\rm CM}\cos\theta_c} \Rightarrow$$

$$\Delta y = \Delta x\tan\theta_c + \frac{g}{2}\frac{(\Delta x)^2}{v_{\rm CM}^2\cos^2\theta_c} \tag{8–29}$$

$$= \Delta x\tan\theta_c + \frac{7(\Delta x)^2}{20R\cos^2\theta_c\,(1-\cos\theta_c)},$$



شكل ٨-٥: شكل كرةٍ لحظةَ تركِها حافةَ المكعب.

حيث استخدمنا في المعادلة الأخيرة النتيجة v_{CM} من الجزء (ج). بما أننا حسبنا $\cos\theta_c = 10/17$ ووجدنا من شكل ٨-٥ أننا نريد $\Delta x = R(1 - \sin\theta_c)$ لحساب مسافة السقوط، Δy؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \Delta x \tan\theta_c + \frac{7\,(\Delta x)\,R\,(1-\sin\theta_c)}{20R\cos^2\theta_c\,(1-\cos\theta_c)} \\
&= \Delta x \left[\tan\theta_c + \frac{7\,(1-\sin\theta_c)}{20\cos^2\theta\,(1-\cos\theta_c)}\right] \\
&= \Delta x \left[1.3748 + \frac{7\,(0.19131)}{20\,(0.3402)\,(0.41175)}\right] \qquad (8\text{–}30) \\
\Delta y &= 1.8447\Delta x \\
&= 1.8447R\,(1-\sin\theta_c) \\
\Delta y &= 0.353R.
\end{aligned}$$

وهذه هي المسافة التي تسقطها أقصى نقطة على يسار حرف الكرة (لأن الكرة جسم مصمت) في الزمن الذي تستغرقه نفس تلك النقطة للمرور فقط بحرف المكعب.

ينبغي على الكرة لترتطم بالحرف أن تسقط رأسيًّا مسافة:

$$\Delta y = R\cos\theta = 0.588R, \tag{8-31}$$

في هذا الزمن، لا تسقط الكرة لهذه المسافة قبل أن تترك أقصى نقطة على اليسارِ الحافةَ؛ ومن ثَمَّ لا ترتطم بها.

بدلًا من ذلك، نستطيع أيضًا النظر إلى مركز الكرة كدالةٍ في الزمن بعد أن تفقد الكرة تلامُسَها مع حافة المكعب. حسبنا سرعة مركز الكتلة عند هذا الموضع في الجزء (ب)، فنسميها إذنْ $\vec{V}_0$.

$$V_0^2 = gR\cos\theta_c, \tag{8-32}$$

حيث نعلم مرة أخرى أن $\cos\theta_c = 10/17$. سرعتا مركز الكتلة الابتدائيتان في الاتجاهين x وy بمجرد أن تفقد الكرة تلامسها هما:

$$V_{0x} = V_0\cos\theta_c = \sqrt{gR}(\cos\theta_c)^{3/2} \tag{8-33}$$
$$V_{0y} = -V_0\sin\theta_c = -\sqrt{gR}(\sin\theta_c)(\cos\theta_c)^{1/2}.$$

موضع مركز الكتلة كدالة في الزمن هو:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t = R\sin\theta_c + \sqrt{gR}(\cos\theta_c)^{3/2}t$$
$$y(t) = y_0 + V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{8-34}$$
$$= R\cos\theta_c - \sqrt{gR\cos\theta_c}\,(\sin\theta_c)\,t - \frac{1}{2}gt^2.$$

وبالتالي فإن مربع المسافة التي يقطعها مركز الكتلة من آخِر نقطة تلامس، كدالة في الزمن، هي:

$$\begin{aligned}R(t)^2 &= x^2(t) + y^2(t)\\&= R^2\sin^2\theta_c + 2\sqrt{gR^3}\sin\theta_c(\cos\theta_c)^{3/2}t + gR\cos^3\theta_c t^2 + R^2\cos^2\theta_c\\&\quad - 2\sqrt{gR^3}\sin\theta_c(\cos\theta_c)^{3/2}t - gR\cos\theta_c t^2\\&\quad + gR\cos\theta_c\sin^2\theta_c t^2 + \sqrt{g^3R\cos\theta_c}\sin\theta_c t^3 + \frac{g^2t^4}{4}\\R(t)^2 &= R^2 + \sqrt{g^3R\cos\theta_c}\sin\theta_c t^3 + \frac{g^2t^4}{4}.\end{aligned} \tag{8-35}$$

بما أن $R(t)^2 > R^2$ لجميع $t > 0$، فقد رأينا أن الكرة دائمًا تفوِّت الارتطام بالحافة.

(٨-٧) (أ) سرعة هذه النقطة هي نتيجة لمزيج من الحركتين الدورانية والانتقالية. الحركة الانتقالية نتيجة حركة مركز الكتلة (CM) كردٍّ فعلٍ لكمية التحرُّك المنتقلة من الدفعة وحقيقة أن القضيب جسم جاسئ. ومن ثم فإن السرعة الانتقالية للنقطة p' هي:

$$Mv_{\mathrm{CM}} = -P \Longrightarrow v_{\mathrm{trans}} = v_{\mathrm{CM}} = -\frac{P}{M}, \tag{8-36}$$

حيث M هي كتلة القضيب، وبافتراض أن الدفعة في الاتجاه $x-$. دوران p' حول مركز الكتلة يأتي من كمية التحرك الزاوية التي نقلتها الدفعة، ومن ثم نحسب w_{CM}، السرعة الزاوية حول مركز الكتلة، على النحو التالي:

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = I_{\mathrm{CM}}\omega_{\mathrm{CM}} = P\cdot s\\\frac{ML^2}{12}\omega_{\mathrm{CM}} = P\cdot s \Longrightarrow\\\omega_{\mathrm{CM}} = \frac{12Ps}{ML^2}.\end{gathered} \tag{8-37}$$

تكون إذنْ سرعة p' نتيجة الدوران في اتجاه $x+$ (لأنها على الجانب العكسي من مركز الكتلة بالنسبة إلى الدفعة)؛ ومن ثَمَّ فإن:

$$v_{\text{rot}} = \omega_{\text{CM}} \cdot y = \frac{12Ps}{ML^2} y. \tag{8-38}$$

إذنْ محصلة سرعة p' هي:

$$v_{p'} = v_{\text{trans}} + v_{\text{rot}} = \frac{12Ps}{ML^2} y - \frac{P}{M}. \tag{8-39}$$

(ب) قيمة s السحرية تجعل $v_{p'} = 0$؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} v_{p'} &= 0 \Longrightarrow \\ \frac{12Ps}{ML^2} y &= \frac{P}{M} \Longrightarrow \\ s &= \frac{L^2}{12y}. \end{aligned} \tag{8-40}$$

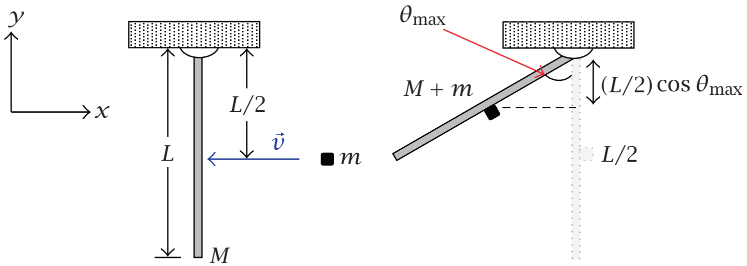
إذا كان $y = 0.400L$؛ إذنْ فإن:

$$s = \frac{L^2}{12\,(0.400L)} = 0.208L. \tag{8-41}$$

لاحظ أن p وp' قابلتان للتبادل ($s \cdot y = L^2/12$). إذا أُرسِلَتِ الدفعةُ عند مسافة $0.4L$ من مركز الكتلة، فإن نقطةً ما عند مسافة $0.208L$ من مركز الكتلة على الجانب العكسي لن ترتدَّ.

(ج) احسب كمية التحرك الزاوي حول محور التماثُل بعد الدفعة. استخدم نظرية المحور المتوازي لحساب عزم القصور الدوراني I_{axle} حول محور التماثل.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{axle}} &= P\,(d + d') \\ I_{\text{axle}}\omega_{\text{axle}} &= P\,(d + d') \\ \left(Ma^2 + Md^2\right)\omega_{\text{axle}} &= P\,(d + d') \Longrightarrow \\ \omega_{\text{axle}} &= \frac{P\,(d + d')}{M\,(a^2 + d^2)}. \end{aligned} \tag{8-42}$$



شكل ٨-٦: المسألة (٨-٨).

تُستنتَج سرعة مركز الكتلة من حقيقة أنها تنفذ حركة دورانية بحتة حول محور التماثل الثابت.

$$v_{\mathrm{CM}} = \omega_{\mathrm{axle}} d = \frac{Pd\,(d+d')}{M\,(a^2+d^2)}. \tag{8-43}$$

نحصل على كمية التحرُّك الخطي لمركز الكتلة من مزج الدفعة $\vec{P}$ والدفعة من محور التماثل. نعلم أنهما في اتجاهين متعاكسين، وإلا فإن المضرب سوف يطير في اتجاه $\vec{P}$.

$$\begin{aligned} P - P_{\mathrm{axle}} &= M v_{\mathrm{CM}} \Longrightarrow \\ P_{\mathrm{axle}} &= P\left[1 - \frac{d^2 + d\cdot d'}{a^2+d^2}\right] \\ &= P\left[\frac{a^2 - d\cdot d'}{a^2+d^2}\right]. \end{aligned} \tag{8-44}$$

لكيلا تكون هناك دفعة عند محور التماثل نحتاج إلى:

$$P_{\mathrm{axle}} = 0 \Longrightarrow a^2 = d\cdot d'. \tag{8-45}$$

(٨-٨) (أ) التصادم غير مرنٍ؛ ومن ثَمَّ فإن الطاقة الميكانيكية غير محفوظة. يؤثِّر المفصل بقوى خارجية على القضيب، وبالتالي فإن كمية التحرُّك الخطي للقضيب والصلصال غير محفوظة في التصادم هي أيضًا. كمية التحرُّك الزاوي للقضيب والصلصال

حول محورٍ يمرُّ خلال المفصل وعمودي على المستوى $x-y$ تكون محفوظة لأن المفصل لا يمكنه التأثير بأي عزم حول ذلك المحور؛ إذنْ نحسب السرعة الزاوية بعد التصادم مباشَرةً على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{initial}} &= \mathcal{L}_{\text{final}} = I_{\text{total}}\omega \\ mv \cdot \frac{L}{2} &= \left[I_{\text{rod about end}} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] \omega \\ \frac{mvL}{2} &= \left[\frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{4}mL^2 \right] \omega \Longrightarrow \\ \omega &= \frac{6mv}{L\left[4M+3m\right]}. \end{aligned} \tag{8-46}$$

بعد التصادم، تكون الطاقة الميكانيكية الدورانية محفوظة لأن المفصل مرة أخرى لا يسبب أي عزم خارجي لأي محور يمر خلاله، وتكون الجاذبية المؤثرة على مركز كتلة النظام المتكون من القضيب والصلصال محفوظةً؛ يمكننا إذنْ إيجاد أقصى زاوية للأرجحة من حالة الاتزان على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \Delta K &= -\Delta U_{\text{grav}} \\ 0 - \frac{1}{2} I_{\text{total}}\omega^2 &= -\left(m+M\right)\frac{gL}{2}\left(1-\cos\theta_{\max}\right) \Longrightarrow \\ \frac{3m^2v^2}{2\left(4M+3m\right)} &= \frac{1}{2}\left(m+M\right)gL\left(1-\cos\theta_{\max}\right) \Longrightarrow \\ \theta_{\max} &= \cos^{-1}\left[1 - \frac{3m^2v^2}{gL\left(m+M\right)\left(3m+4M\right)}\right]. \end{aligned} \tag{8-47}$$

ملحوظة: ماذا يحدث لو أن الحد بين القوسين المربعين أقل من −١؟ في هذه الحالة فإن القضيب سيدور في دائرة تامة إلى الأبد (إذا لم يكن السقف موجودًا).

(ب) لا تقوم الجاذبية بأي دور في التصادم لأنها قوة محددة (ومن ثَمَّ لا يمكنها إحداث أي دفعة)، وحتى لو أمكن أن تسبِّبَ دفعة فإن تلك الدفعة ستكون عمودية

على اتجاه التغيُّر في كمية التحرك في هذه المسألة. نعتبر أن نظامنا متكوِّن من القضيب والصلصال. تكون كمية التحرك للنظام قبل التصادم مباشَرةً هي:

$$\vec{p}_{\text{initial}} = mv\hat{i} \tag{8-48}$$

وبعد التصادم مباشَرةً:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{after}} &= (M+m)\,\vec{V}_{\text{CM}} \\ &= (M+m)\,\frac{L}{2}\omega\hat{i} \\ \vec{p}_{\text{after}} &= \frac{M+m}{4M+3m}\,(3mv)\,\hat{i}. \end{aligned} \tag{8-49}$$

الدفعة الخارجية الوحيدة على النظام هي المؤثِّرة بواسطة المفصل. لتكن هذه الدفعة $\Delta\vec{P}_{\text{hinge}}$؛ إذنْ فإن:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}_{\text{hinge}} &= \vec{p}_{\text{after}} - \vec{p}_{\text{initial}} \\ &= mv\left[\frac{3\,(M+m)}{3m+4M} - 1\right]\hat{i} \\ &= -\frac{mMv}{3m+4M}\hat{i}. \end{aligned} \tag{8-50}$$

الدفعة التي يعطيها المفصل إلى القضيب هي:

$$\Delta\vec{p}_{\text{hinge}} = \frac{mMv}{3m+4M}\hat{i}. \tag{8-51}$$

علينا ملاحظة أن الدفعة الكلية التي يعطيها القضيب والسقف إلى المفصل قيمتها صفر.

الفصل التاسع

ملحوظات على الجاذبية

(١) حلول مسائل ملحوظات على الجاذبية

(٩-١) طاقة الحركة لمدار دائري هي نصف طاقة الجهد التثاقلي للمدار؛ إذنْ فإن:

$$K + U = \frac{1}{2}U \Longrightarrow$$

$$K = -\frac{1}{2}U = \frac{GM_E m}{2\,(R_E + 3.00 \times 10^5\ \mathrm{m})} \Longrightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + 3.00 \times 10^5}} \qquad (9\text{–}1)$$

$$= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/\,(kg \cdot s^2)})\ (5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6.67 \times 10^6\ \mathrm{m}}}$$

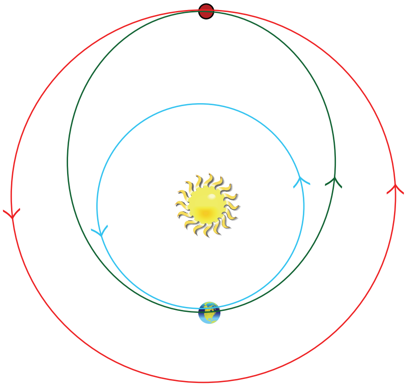
$$v = 7.73 \times 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

يمكن الحصول على الزمن الدوري لذلك المدار بسهولة من قانون كبلر الثالث.

$$\text{period} = \left[\frac{4\pi^2 r^3}{GM_E}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{4(3.14159)^2 (6.67 \times 10^6)^3}{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)})\ (5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}\right]^{1/2} \qquad (9\text{–}2)$$

$$\text{period} = 5420\ \mathrm{s} = 1.51\ \text{hours}.$$



شكل ٩-١: مخطط المدار للمسألة (٩-٢) (أ).

(٩-٢) (أ) الرسم التوضيحي في هذه الحالة كما يلي: يتحرك مدار هوهمان مبتعدًا عن الشمس أكثر من الكرة الأرضية، لذلك نحتاج إلى زيادة الطاقة الكلية لحضيض المدار الانتقالي. وهذا يعني زيادة طاقة الحركة؛ ومن ثَمَّ نطلق الصواريخ بحيث تتسارع في اتجاه الكرة الأرضية في مدارها.

(ب) لتعيين مقدار السرعة اللازم للإطلاق من مدارٍ قريبٍ من الأرض، يمكننا استخدام مبدأ حفظ الطاقة. وبما أن مدار الكرة الأرضية دائري تقريبًا، فيمكننا استخدام التقريب (كتلة سفينة الفضاء m، ومقدار سرعة الكرة الأرضية في مدارها v_0، ونصف قطر مدار الكرة الأرضية من الشمس هو R_{earth}).

$$K = \frac{1}{2}U$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GM_{\text{sun}}m}{2R_{\text{earth}}} \Longrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{GM_{\text{sun}}R_{\text{earth}}} \tag{9-3}$$

$$= \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\,(1.99\times10^{30}\,\text{kg})}{1.50\times10^{11}\,\text{m}}}$$

$$v_0 = 2.97\times10^4\,\text{m/s}.$$

بالطبع فإن السفينة تدور في مدار؛ ومن ثَمَّ فإن مقدارَ السرعةِ الحقيقيَّ أعلى من هذا، ولكن التصحيح حوالي ٢٥٪. دعنا نستخدم v_0 بالأعلى.

بالنسبة إلى المدار الإهليجي (المدار الانتقالي) تظل الطاقة الميكانيكية محفوظة مثلها مثل كمية التحرك الزاوي. نستخدم الآن v_p كمقدار سرعة المجس بالنسبة إلى الشمس عند نقطة الحضيض (الإطلاق من الأرض).

$$E_{\text{perihelion}} = E_{\text{aphelion}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{peri}}^2 - \frac{GM_{\text{sun}}}{R_{\text{earth}}} = \frac{1}{2}mv_{\text{aph}}^2 - \frac{GM_{\text{sun}}m}{R_{\text{Mars}}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{peri}} = \mathcal{L}_{\text{aph}} \tag{9-4}$$

$$mv_{\text{peri}}R_{\text{earth}} = mv_{\text{aph}}R_{\text{Mars}} \Longrightarrow$$

$$v_{\text{aph}} = v_{\text{peri}}\frac{R_{\text{earth}}}{R_{\text{Mars}}}.$$

بدمج النتيجتين من كمية التحرك الزاوي وحفظ الطاقة، نرى أن:

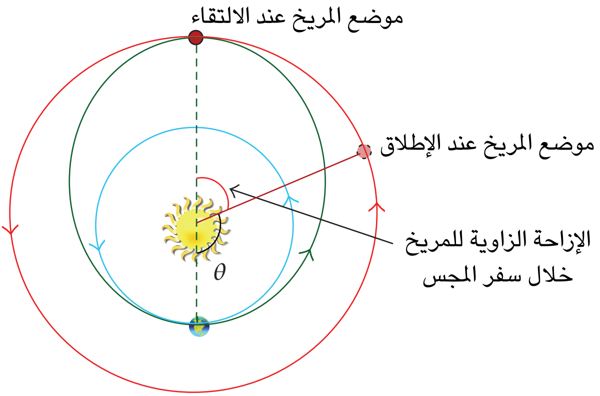
$$\frac{1}{2}v_{\text{peri}}^2 - \frac{GM_{\text{sun}}}{R_{\text{earth}}} = \frac{1}{2}v_{\text{peri}}^2\frac{R_{\text{earth}}^2}{R_{\text{Mars}}^2} - \frac{GM_{\text{sun}}}{R_{\text{Mars}}} \Longrightarrow$$

$$v_{\text{peri}}^2\left[\frac{R_{\text{Mars}}^2 - R_{\text{Mars}}^2}{2R_{\text{Mars}}^2}\right] = GM_{\text{sun}}\left[\frac{R_{\text{Mars}} - R_{\text{earth}}}{R_{\text{earth}}R_{\text{Mars}}}\right] \Longrightarrow$$

$$v_{\text{peri}} = \sqrt{GM_{\text{sun}}\frac{2R_{\text{Mars}}}{R_{\text{earth}}\left(R_{\text{Mars}} + R_{\text{earth}}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\left(6.67\times10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(1.99\times10^{30}\,\text{kg}\right)\left(2.28\times10^{11}\,\text{m}\right)}{\left(1.50\times10^{11}\,\text{m}\right)\left(2.28+1.50\right)\times10^{11}\,\text{m}}}$$

$$v_{\text{peri}} = 3.27\times10^4\,\text{m/s}. \tag{9-5}$$



شكل ٩-٢: مواضع المريخ بالنسبة لمدار هوهمان الانتقالي.

إذنْ لا بد أن يكون مقدار سرعة الإطلاق:

$$v_{\text{launch}} = (3.27 - 2.97) \times 10^4\,\text{m/s} = 2.93 \times 10^3\,\text{m/s} \simeq 3\,\text{km/s}. \qquad (9\text{-}6)$$

لإيجاد الزمن اللازم يمكننا الاستفادة من استنتاجنا لقانون كبلر الثالث للمدارات الإهليجية كالآتي:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_{\text{sun}}}\left[\frac{r_{\text{earth}} + r_{\text{Mars}}}{2}\right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{(3.141593)^2\,(3.78 \times 10^{11}\,\text{m})^3}{8\,(6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)\,(1.99 \times 10^{30}\,\text{kg})}} \qquad (9\text{-}7) \\ T &= 2.24 \times 10^7\,\text{s} \simeq 8.5\ \text{months}. \end{aligned}$$

(ج) بما أن كوكب المريخ ينبغي أن يكون عند نقطة الأوج وقت وصول سفينة الفضاء إليه؛ إذنْ نحتاج أن يكون المريخ عند زاوية θ عند إطلاق المجس كما هو مبيَّن في الشكل أدناه.

الزاوية التي نرغب في حسابها هي الفرق بين موضع الإطلاق للمريخ وموضعه عند نقطة الأوج للمدار الانتقالي.

$$\theta = \pi - \frac{(2.24 \times 10^7\,\text{s})\,(2\pi/\text{Martian year})}{(687\ \text{days/Martian year})\,(24 \cdot 3600\,\text{s/day})},$$

$$\theta = 0.770\ \text{radians} = 44.1^\circ. \qquad (9\text{–}8)$$